Непрерывные марковские процессы. Системы массового обслуживания

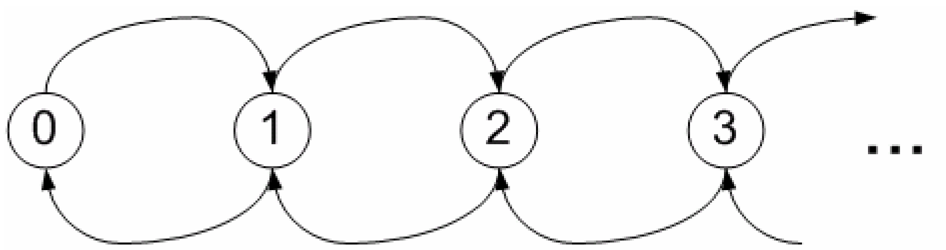
Непрерывные марковские процессы

- Состояние
- Полное множество состояний
- Граф состояний – переходы из состояния в состояние
- Начальное состояние
- Интенсивности переходов

Пример. Магазин

Объект: магазин

- Состояние: число покупателей
- Полное множество состояний: 0, 1, 2, …
- Граф состояний:



- Начальное состояние: 0 покупателей

Пример. Магазин

Объект: магазин с одним продавцом

Описание в терминах ТМО:

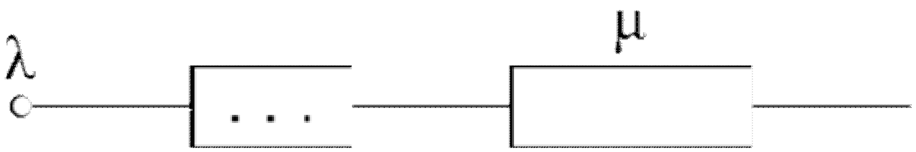
- Заявка: покупатель
- Закон поступления: экспоненциальный (время поступления t – СВ, распределённая по экспоненциальному закону), интенсивность поступления λ, $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$
- Обслуживающий канал (прибор): продавец
- Закон обслуживания: экспоненциальный (время обслуживания τ – СВ, распределённая по экспоненциальному закону), интенсивность обслуживания μ $f(\tau) = \mu e^{-\mu \tau}$
- Число каналов: k = 1 – одноканальная СМО

Пример. Магазин

Объект: магазин с одним продавцом

Описание в терминах ТМО:

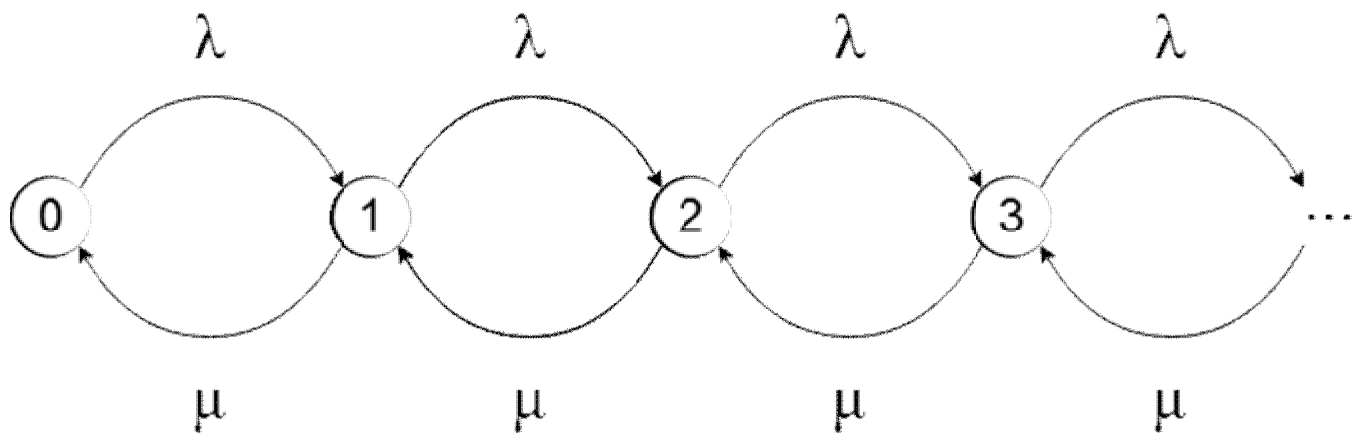
- Очередь: не ограничена (любой покупатель может встать в очередь, каждая новая заявка будет обслужена)
- Мощность источника: бесконечный источник



Пример. Магазин

Объект: магазин с одним продавцом

- Состояние: число покупателей
- Полное множество состояний: 0, 1, 2, …
- Граф состояний, интенсивности переходов



Кодирование

Для типовых СМО

Кодирование по Кендаллу:

A / B / K / m / n

- A – закон поступления заявок – закон распределения случайной величины: времени между событиями поступления заявок
- B – закон обслуживания – закон распределения случайной величины: времени обслуживания
- K – число каналов
- m – количество мест в очереди
- n – мощность источника

Кодирование

Для типовых СМО

Кодирование по Кендаллу:

A / B / K / m / n

Кодирование законов поступления и обслуживания:

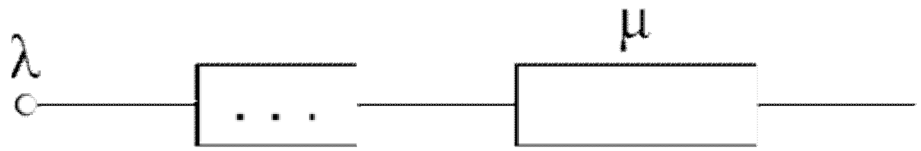
- M – экспоненциальный
- E_k – Эрланга k порядка
- D – детерминированный (время – не случайная величина)
- G – любой

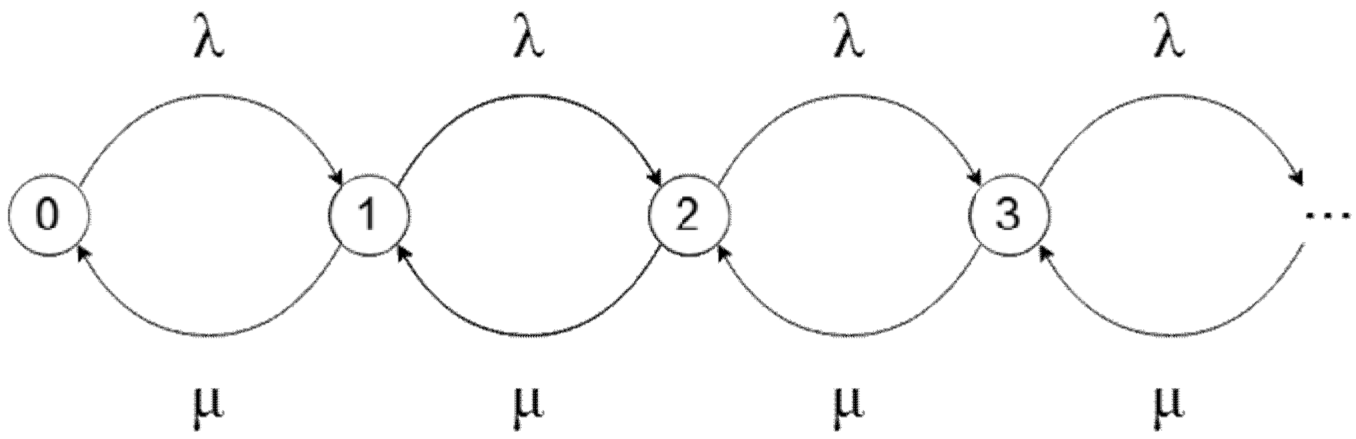
Одноканальная СМО

Объект: магазин с одним продавцом

Кодирование по Кендаллу:

- M / M / 1
  - 1 обслуживающий прибор
  - бесконечная очередь

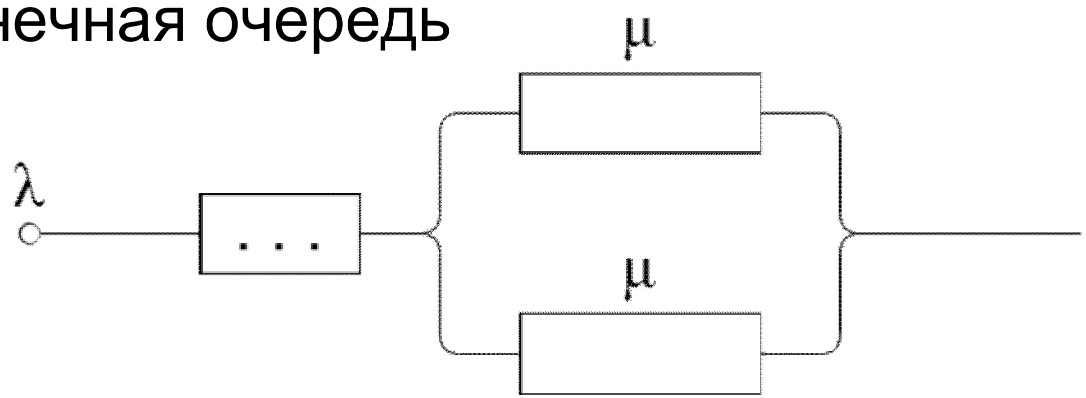


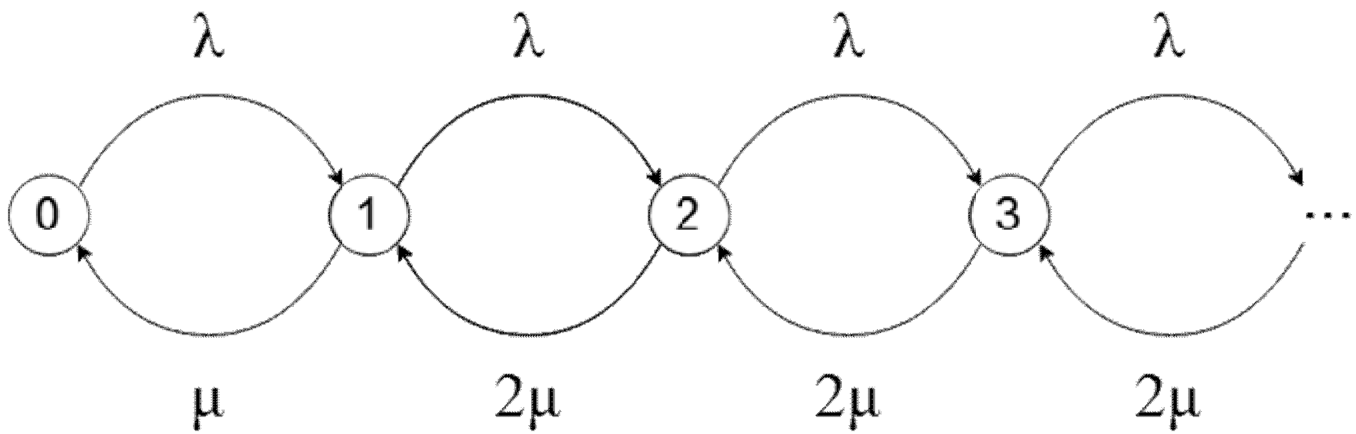


Многоканальная СМО

Объект: магазин с двумя продавцами

- M / M / 2
  - 2 обслуживающих прибора
  - бесконечная очередь

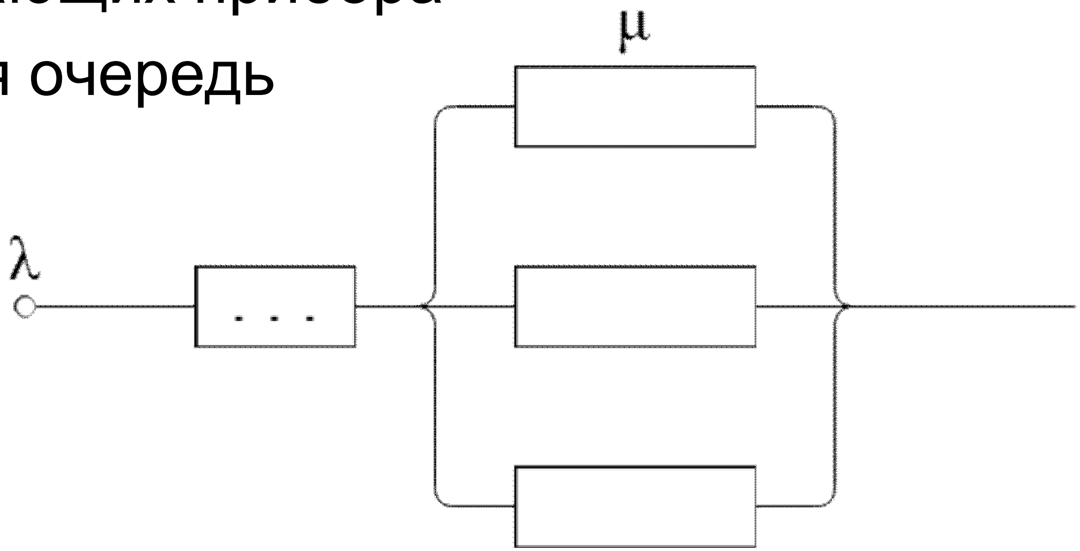


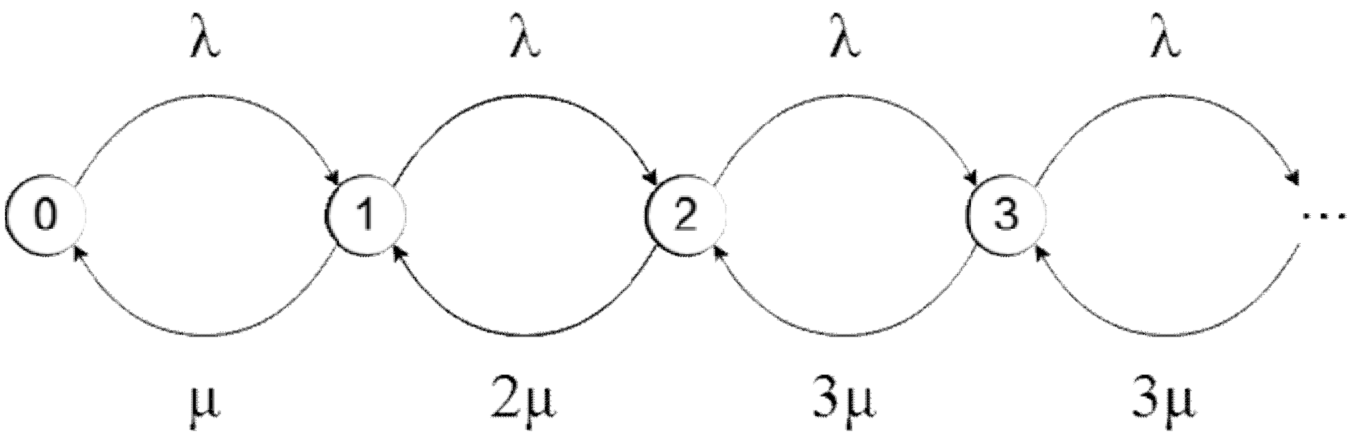


Многоканальная СМО

Объект: магазин с тремя продавцами

- M / M / 3
  - 3 обслуживающих прибора
  - бесконечная очередь

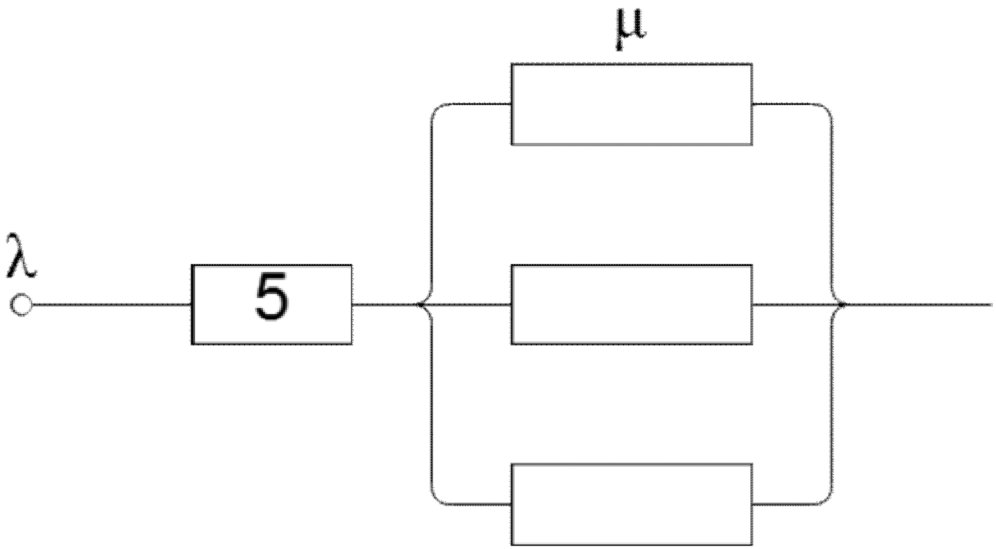




СМО с отказами

Объект: магазин с пятью стульями

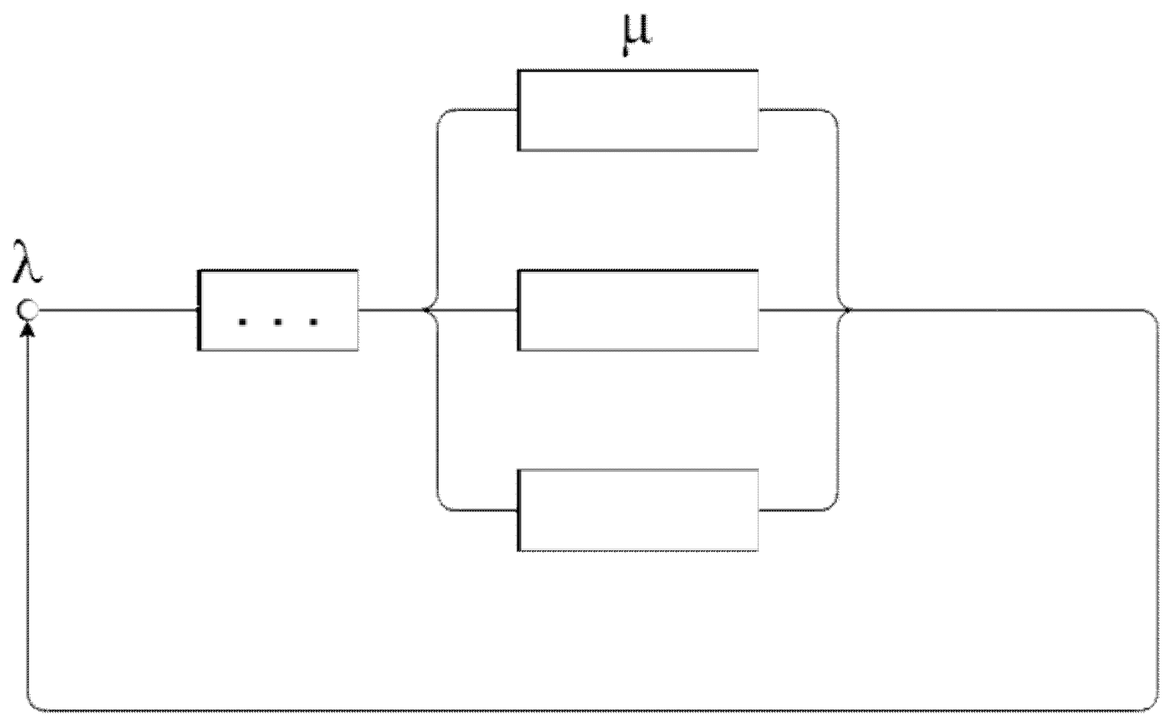
- M / M / 3 / 5
  - – 3 обслуживающих прибора
  - – очередь ограничена 5 местами – система с отказами



Замкнутая СМО

Объект: магазин на пароме

- замкнутая СМО
- ограниченная мощность источника
- в системе циркулирует заданное число заявок



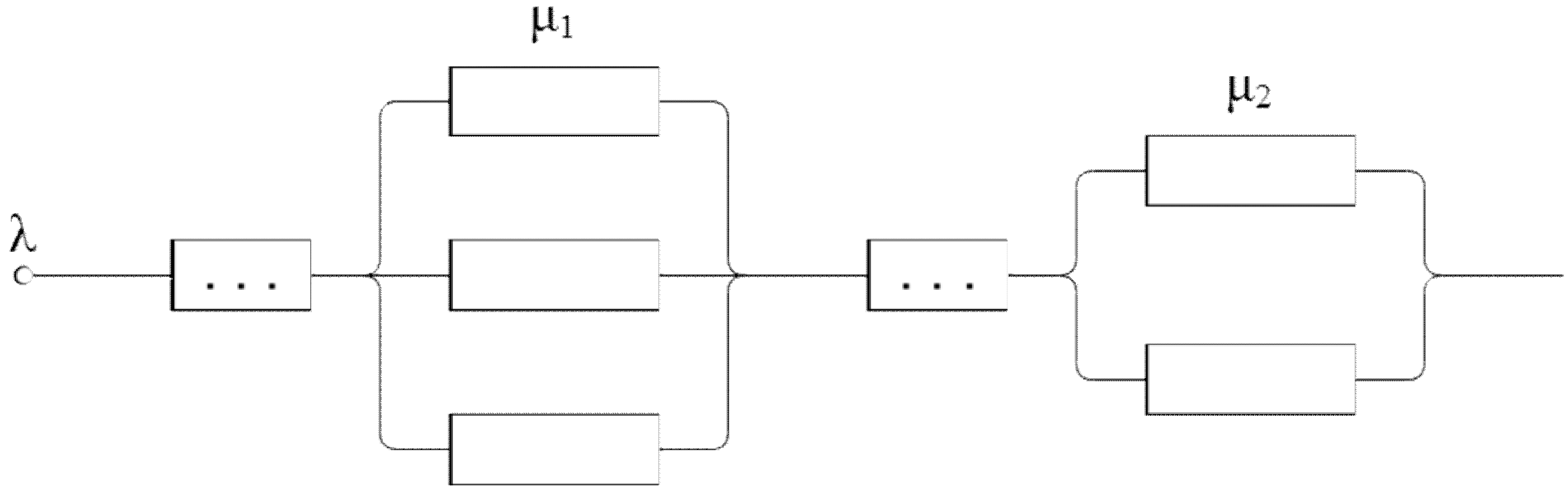
Многофазная СМО

Объект: магазин альтернативного типа

– несколько фаз, например,

1 фаза – оплата товара – система M / M / 3

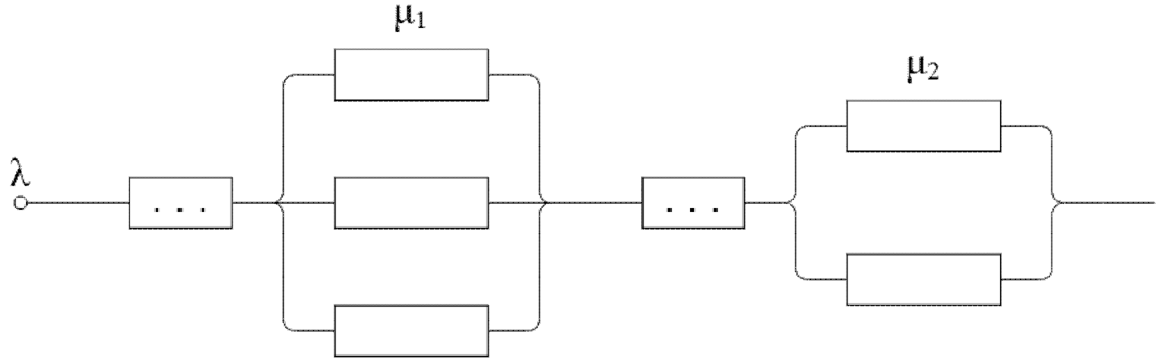
2 фаза – выдача товара – система M / M / 2

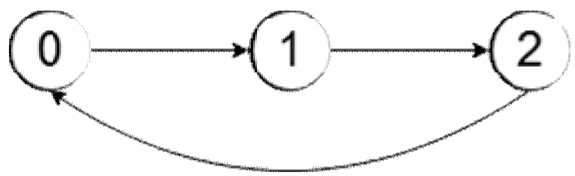


Многофазная СМО = Сеть МО

Объект: магазин альтернативного типа

– многофазную СМО можно представить как сеть, каждый узел которой – СМО





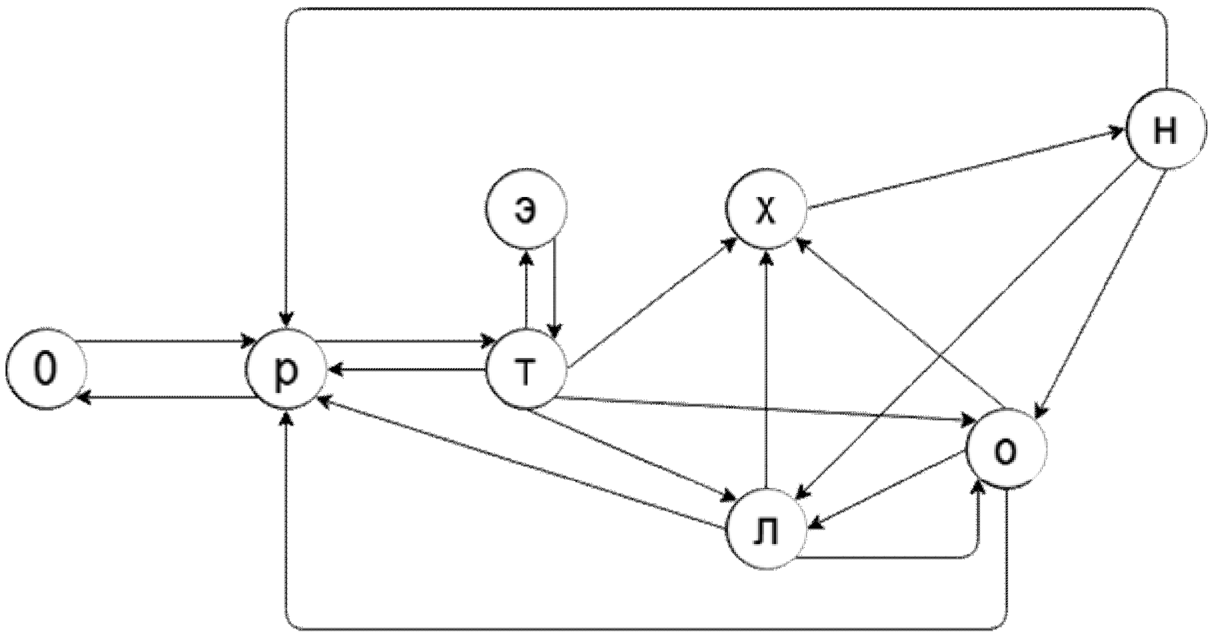
узел 0 – внешняя среда

узел 1 – фаза оплаты – система M / M / 3

узел 2 – фаза выдачи товара – система M / M / 2

Сеть МО

Объект: медкомиссия



узел 0 – внешняя среда

узел «р» – регистратура

узел «т» – терапевт

узел «э» – ЭКГ

узел «х» – хирург

узел «н» - невропатолог

узел «л» – лор

узел «о» – офтальмолог

Классификация СМО

- По количеству каналов:
  – одноканальные
  – многоканальные

- По ограничению очереди:
  – с ограниченной очередью (с отказами)
  – с неограниченной очередью (без отказов)

- По ограничению ожидания:
  – с ограниченным ожиданием (на заявку в очереди наложены ограничения, например, на время нахождения в очереди или в системе)
  – с неограниченным ожиданием

Классификация СМО

- По мощности источника:
  - – с бесконечным источником
  - – с конечным источником

- По количеству фаз:
  - – однофазные
  - – многофазные

Классификация СМО

- По дисциплине обслуживания – правилу выбора заявок из очереди для обслуживания:

  – в порядке очереди (FIFO – First In First Out)

  – в обратном порядке (LIFO – Last In First Out)

  – в случайном порядке

  – по минимальному времени до отказа (если на время нахождения в очереди наложены ограничения)

- По дисциплине очереди – правилу добавления в очередь:

  – выбор самой короткой очереди

  – в конец очереди

  – с учётом приоритетов: вне очереди (в начало очереди, сразу на обслуживание)

Построение моделей

- Использование типовых СМО – A / B / K / m / n :
  – одноканальные / многоканальные
  – с ограниченной / бесконечной очередью
  – с конечным / бесконечным числом заявок
- Выбор по классификации
- Правила обслуживания и очередей
- Учёт особенностей, экзотические СМО
- Немарковские СМО – законы поступления / обслуживания не экспоненциальные
- СМО с неоднородным потоком – учёт приоритетов
- Сети МО

Построение моделей

Учёт особенностей, экзотические СМО

- ограничение времени нахождения в системе / очереди

  – результат обслуживания заявки имеет смысл только какое-то время после поступления (эффект устаревания информации)
- блокировки для исключения потерь между фазами
- конвейер (последовательная СМО):

  – обслуживающие приборы расположены последовательно
- прореживание потока заявок

  – потоки Эрланга

Построение моделей

Учёт особенностей, экзотические СМО

- переменная интенсивность поступления / обслуживания
  - эффект толпы:

    при большой очереди интенсивность потока заявок уменьшается
  - СМО с ленивым продавцом:

    пока очередь небольшая интенсивность обслуживания мала, при большой очереди интенсивность обслуживания увеличивается

Построение моделей

Учёт особенностей, экзотические СМО

- переменное количество каналов
  - СМО с экономией каналов:

    пока очередь небольшая количество каналов мало, при большой очереди вводятся дополнительные каналы обслуживания
- бесконечное количество каналов
- поток поступления каналов

Построение моделей

Учёт особенностей, экзотические СМО

- СМО с разогревом:

  время обслуживания заявки, поступившей в пустую систему, больше времени обслуживания последующих заявок

- СМО с порогом включения:

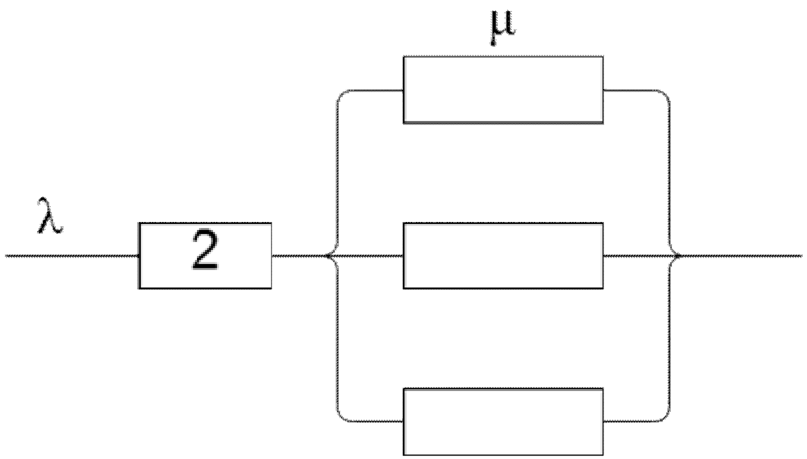
  система начинает обслуживать заявки, если их накопится достаточное количество

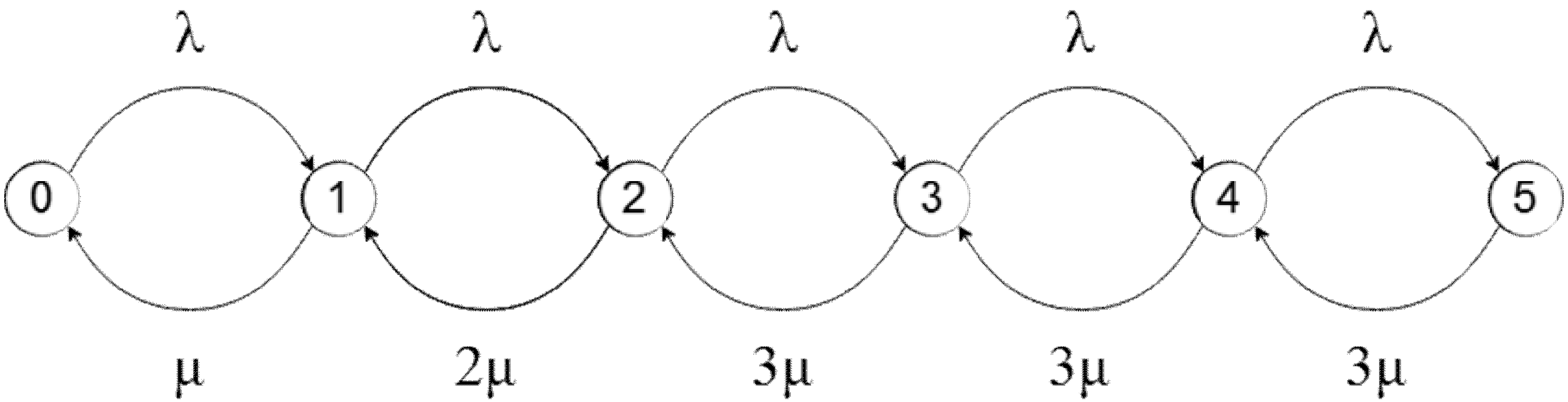
Типовые СМО

M / M / 3 / 2

3 канала

2 места в очереди





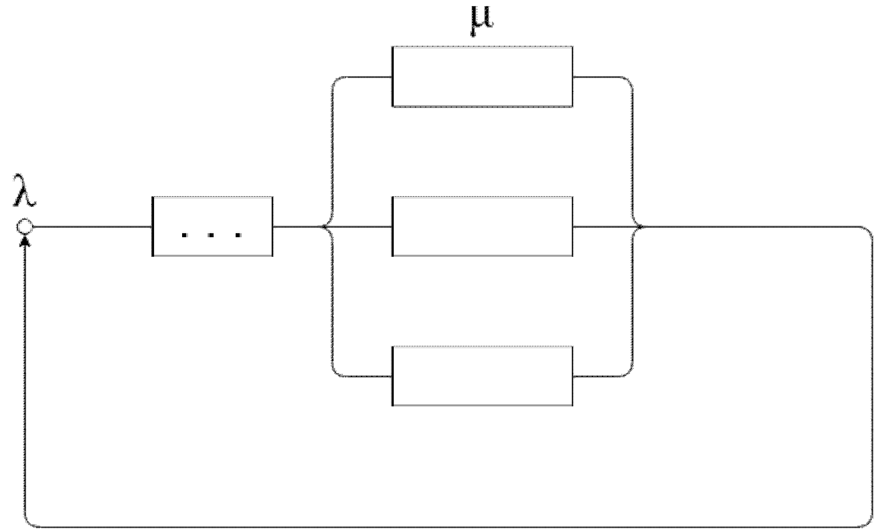
Типовые СМО

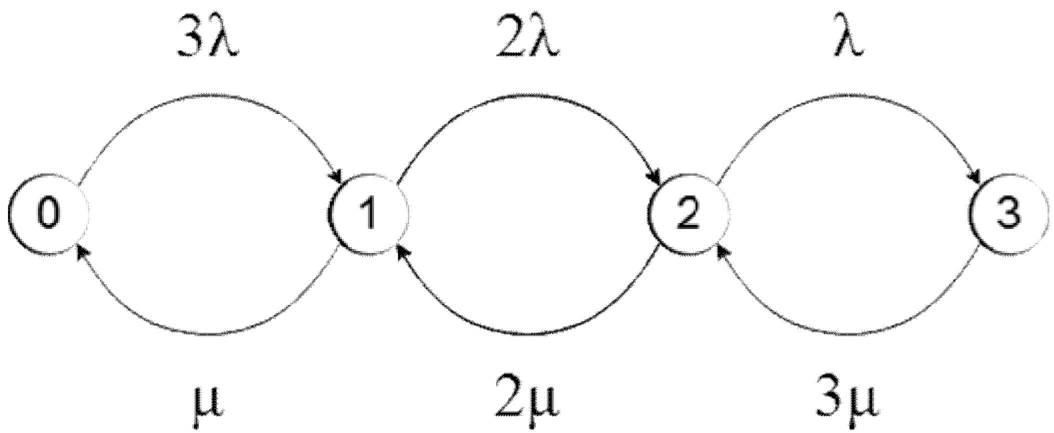
M / M / 3 // 3

3 канала

очередь не ограничена

в системе 3 заявки





Расчёт СМО

1) Построение модели – описание в терминах теории массового обслуживания
2) Введение понятия состояния и построение графа состояний
3) Составление системы уравнений и расчёт вероятностей нахождения системы в каждом состоянии
4) Расчёт показателей системы: количественных, временных, вероятностных

Пример расчёта: замкнутая СМО

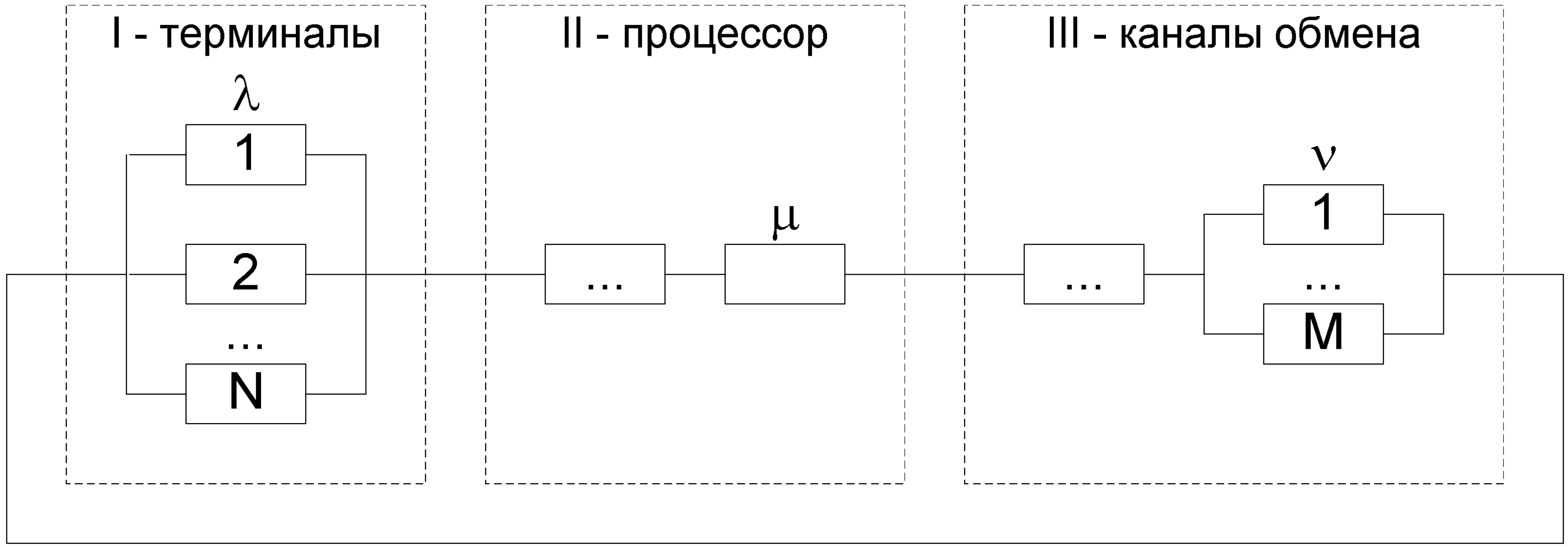
Задача

Рассмотреть работу вычислительной системы: пользователи с терминалов запускают программы на выполнение, они исполняются на процессоре, через каналы обмена результат возвращается пользователям.

Требуется найти время реакции системы на действия пользователей.

Пример расчёта: замкнутая СМО

1) Модель

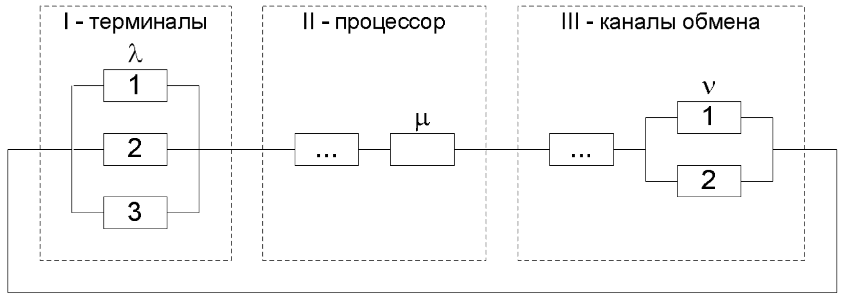


- M = 2
- N = 3
- Число заявок в системе: 3

$$\overline{t_{реак}} = \overline{t_{II-III}} = ?$$

Пример расчёта: замкнутая СМО

2) Граф состояний



- Состояние: (ijk),

  i – число заявок в I фазе,

  j – число заявок во II фазе,

  K – число заявок в III фазе
- Полное множество состояний:

  300,

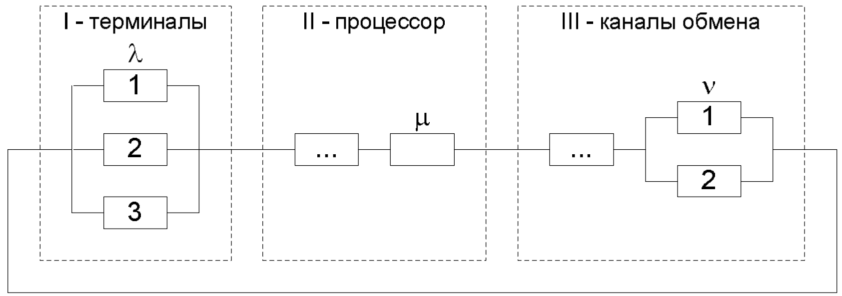
  210, 201,

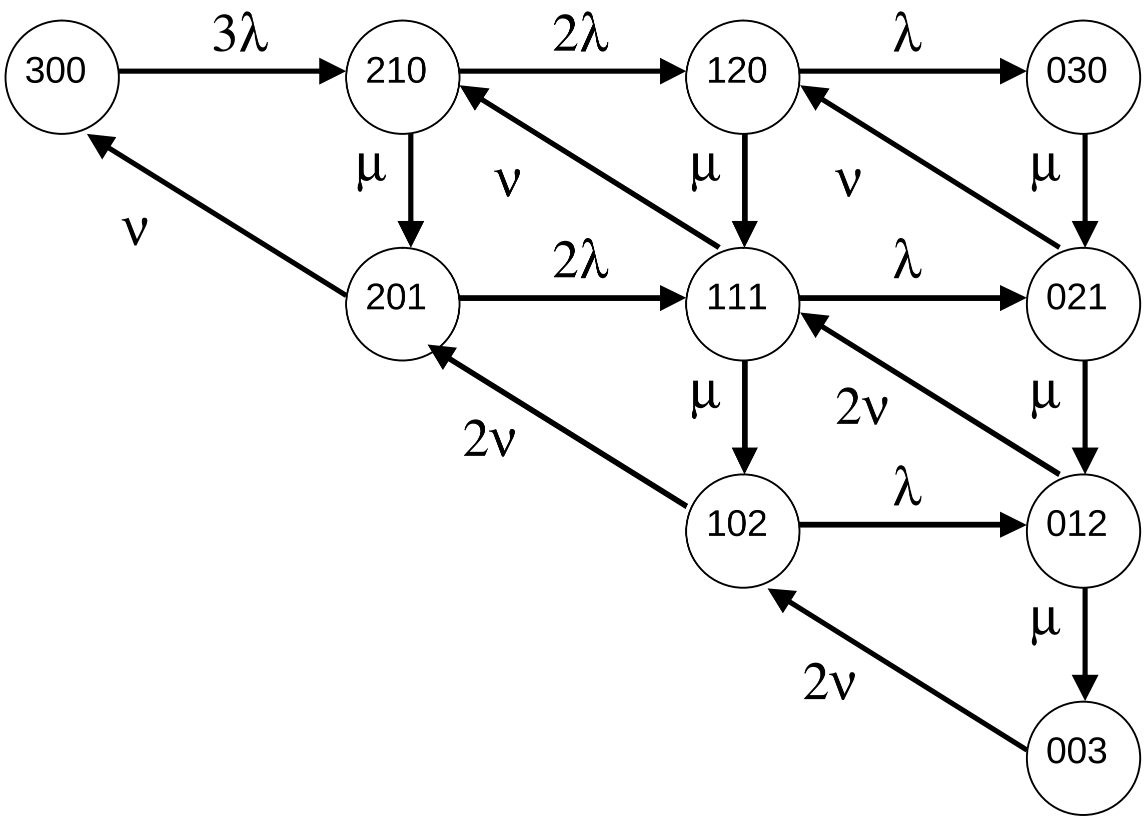
  120, 111, 102,

  030, 021, 012, 003

Пример расчёта: замкнутая СМО

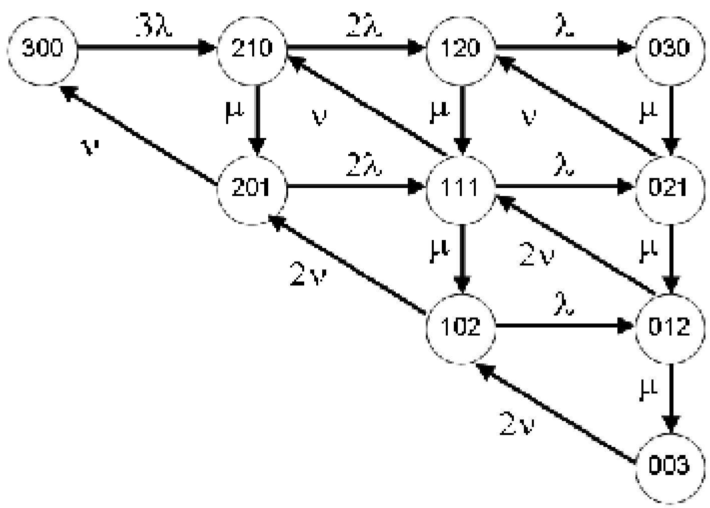
2) Граф состояний





Пример расчёта: замкнутая СМО

3) Система уравнений



- Состояния:

  300, 210, 201, 120, 111, 102,

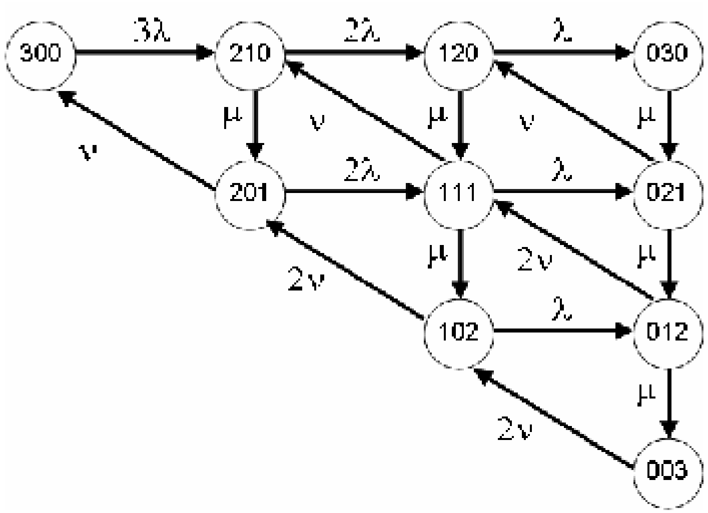
  030, 021, 012, 003

- Вероятности нахождения системы в каждом из состояний:

$$P_{300}, P_{210}, P_{201}, P_{120}, P_{111}, P_{102}, P_{030}, P_{021}, P_{012}, P_{003}$$

Пример расчёта: замкнутая СМО

3) Система уравнений

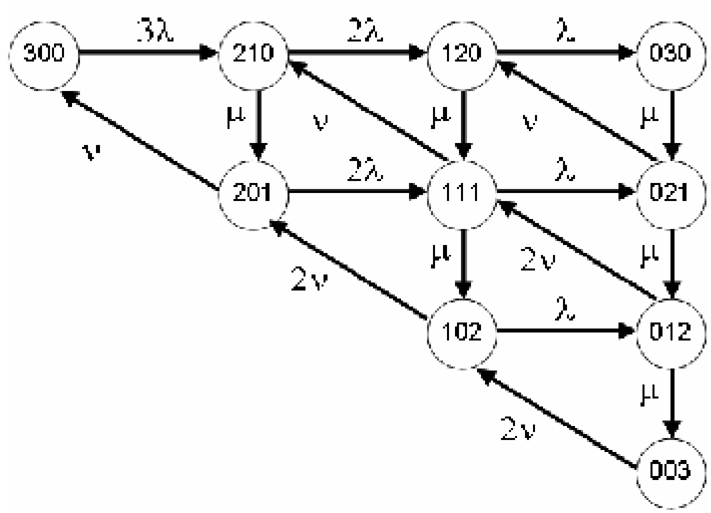


$$
\begin{cases}
P_{300}\cdot 3\lambda = P_{201}\cdot \nu \\
P_{210}\cdot (2\lambda+\mu) = P_{300}\cdot 3\lambda + P_{111}\cdot \nu \\
P_{120}\cdot (\lambda+\mu) = P_{210}\cdot 2\lambda + P_{021}\cdot \nu \\
P_{030}\cdot \mu = P_{120}\cdot \lambda \\
P_{201}\cdot (2\lambda+\nu) = P_{210}\cdot \mu + P_{102}\cdot 2\nu \\
P_{111}\cdot (\lambda+\mu+\nu) = P_{201}\cdot 2\lambda + P_{120}\cdot \mu + P_{012}\cdot 2\nu \\
P_{021}\cdot (\mu+\nu) = P_{111}\cdot \lambda + P_{030}\cdot \mu \\
P_{102}\cdot (\lambda+2\nu) = P_{111}\cdot \mu + P_{003}\cdot 2\nu \\
P_{012}\cdot (\mu+2\nu) = P_{102}\cdot \lambda + P_{021}\cdot \mu \\
P_{003}\cdot 2\nu = P_{012}\cdot \mu
\end{cases}
$$

- 10 уравнений
- 10 неизвестных

Пример расчёта: замкнутая СМО

3) Система уравнений

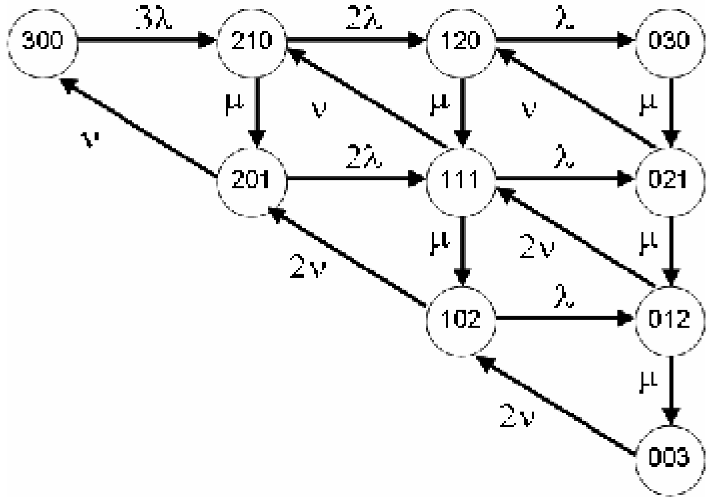


$$
\begin{cases}
P_{300}\cdot 3\lambda = P_{201}\cdot \nu \\
P_{210}\cdot(2\lambda+\mu) = P_{300}\cdot 3\lambda + P_{111}\cdot \nu \\
P_{120}\cdot(\lambda+\mu) = P_{210}\cdot 2\lambda + P_{021}\cdot \nu \\
P_{030}\cdot \mu = P_{120}\cdot \lambda \\
P_{201}\cdot(2\lambda+\nu) = P_{210}\cdot \mu + P_{102}\cdot 2\nu \\
\cancel{P_{111}\cdot(\lambda+\mu+\nu) = P_{201}\cdot 2\lambda + P_{120}\cdot \mu + P_{012}\cdot 2\nu} \\
P_{021}\cdot(\mu+\nu) = P_{111}\cdot \lambda + P_{030}\cdot \mu \\
P_{102}\cdot(\lambda+2\nu) = P_{111}\cdot \mu + P_{003}\cdot 2\nu \\
P_{012}\cdot(\mu+2\nu) = P_{102}\cdot \lambda + P_{021}\cdot \mu \\
P_{003}\cdot 2\nu = P_{012}\cdot \mu \\
P_{300}+P_{210}+P_{201}+P_{120}+P_{111}+P_{102}+P_{030}+P_{021}+P_{012}+P_{003} = 1
\end{cases}
$$

- 10 уравнений
- 10 неизвестных

Пример расчёта: замкнутая СМО

3) Система уравнений



$$P_{300} = \ldots$$

$$P_{210} = \ldots$$

$$P_{201} = \ldots$$

$$P_{120} = \ldots$$

$$P_{111} = \ldots$$

$$P_{102} = \ldots$$

$$P_{030} = \ldots$$

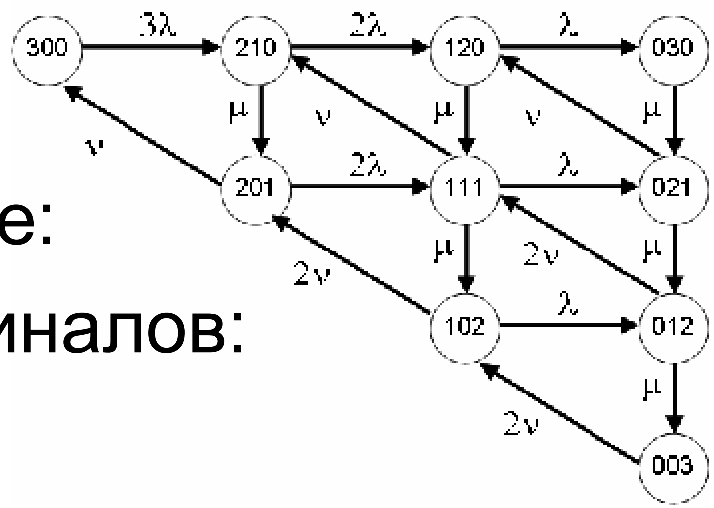
$$P_{021} = \ldots$$

$$P_{012} = \ldots$$

$$P_{003} = \ldots$$

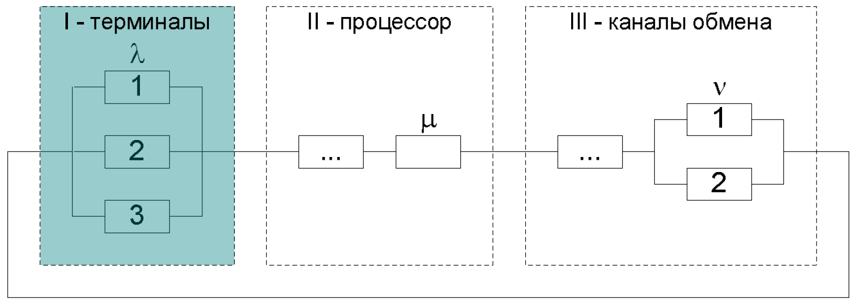
Пример расчёта: замкнутая СМО

4) Расчёт показателей



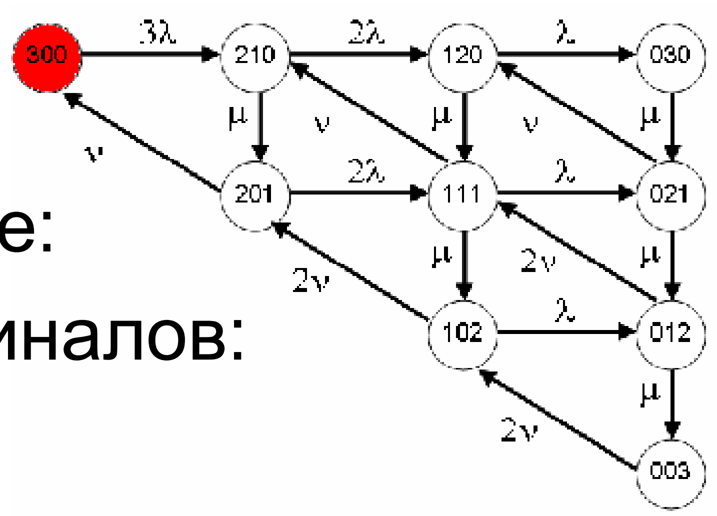
- Среднее число заявок в I фазе:
- Среднее число занятых терминалов:

$$\overline{j_I} = \overline{N_{терм}} =$$



Пример расчёта: замкнутая СМО

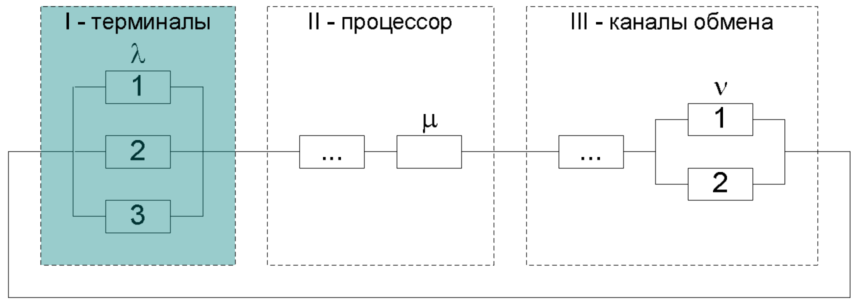
4) Расчёт показателей



- Среднее число заявок в I фазе:
- Среднее число занятых терминалов:

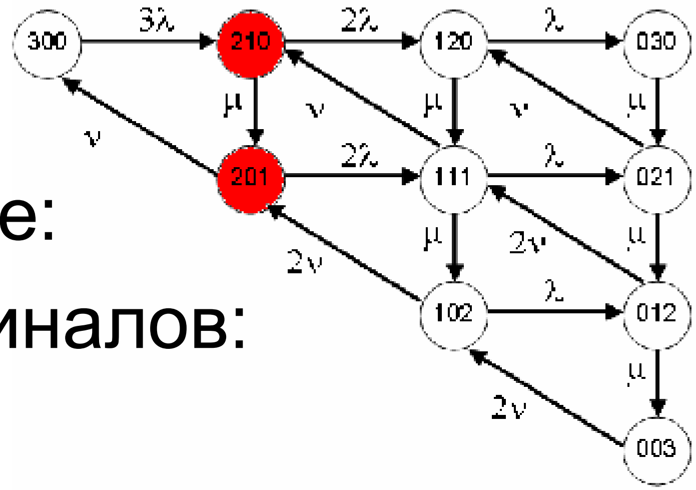
$$\overline{j_I} = \overline{N_{терм}} =$$

$$= 3P_{300} +$$



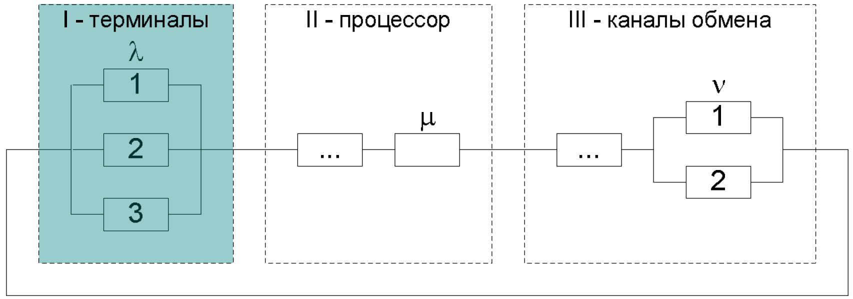
Пример расчёта: замкнутая СМО

4) Расчёт показателей



- Среднее число заявок в I фазе:
- Среднее число занятых терминалов:

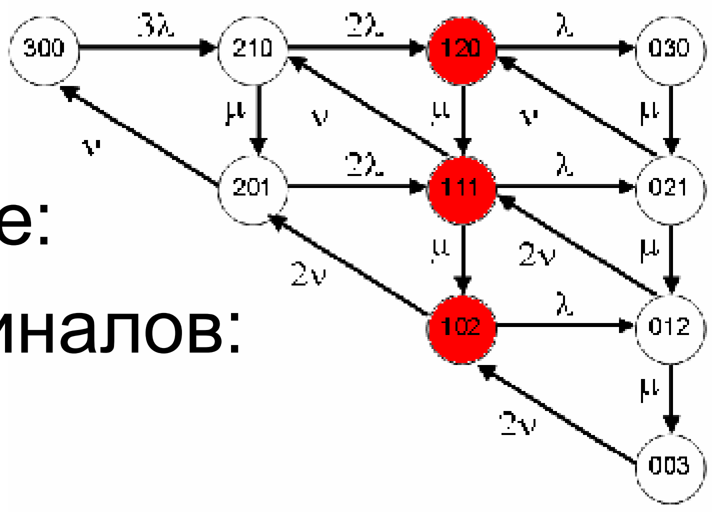
$$\overline{j_I} = \overline{N_{терм}} =$$
$$= 3P_{300} +$$
$$+ 2\left(P_{210} + P_{201}\right) +$$



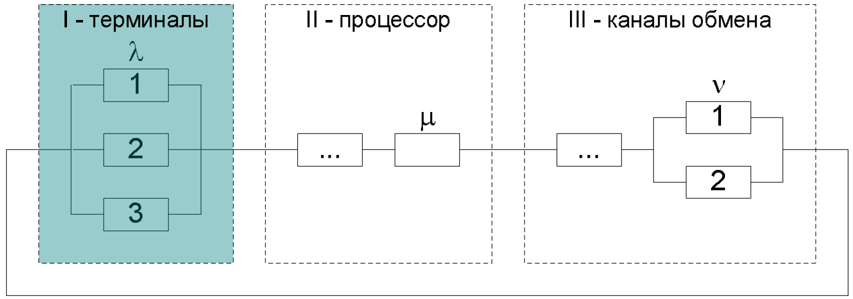
Пример расчёта: замкнутая СМО

4) Расчёт показателей

- Среднее число заявок в I фазе:
- Среднее число занятых терминалов:

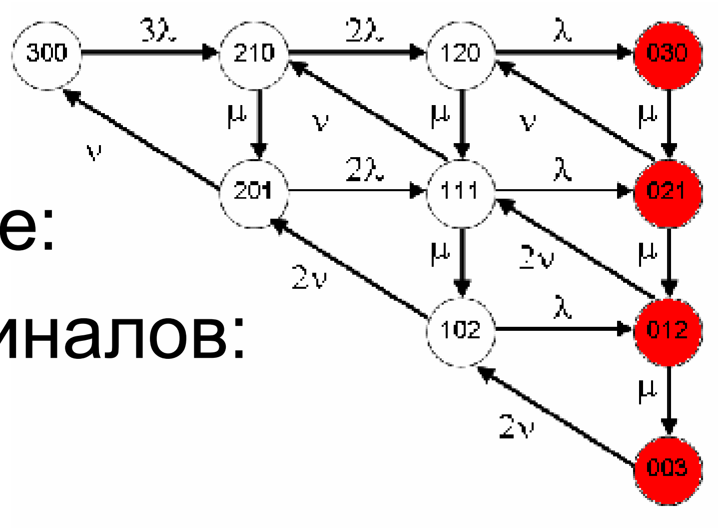


$$\overline{j_I} = \overline{N_{терм}} =$$
$$= 3P_{300} +$$
$$+ 2\left(P_{210} + P_{201}\right) +$$
$$+ 1\left(P_{120} + P_{111} + P_{102}\right) +$$



Пример расчёта: замкнутая СМО

4) Расчёт показателей



- Среднее число заявок в I фазе:
- Среднее число занятых терминалов:

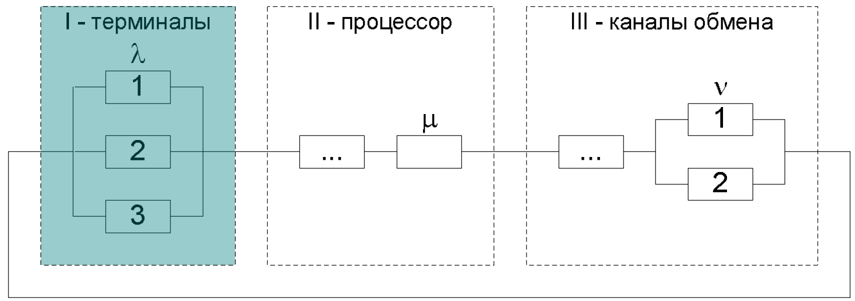
$$
\overline{j_I} = \overline{N_{терм}} =
$$

$$
= 3P_{300} +
$$

$$
+2\left(P_{210} + P_{201}\right) +
$$

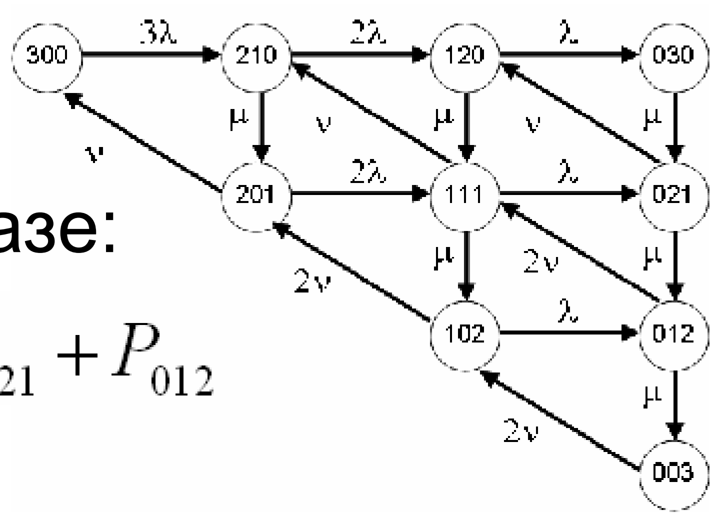
$$
+1\left(P_{120} + P_{111} + P_{102}\right) +
$$

$$
+0\left(P_{030} + P_{021} + P_{012} + P_{003}\right)
$$



Пример расчёта: замкнутая СМО

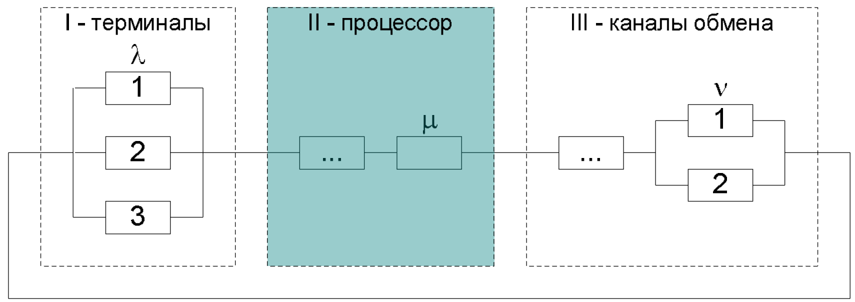
4) Расчёт показателей



- Среднее число заявок во II фазе:

$$\overline{j_{II}} = P_{210} + 2P_{120} + P_{111} + 3P_{030} + 2P_{021} + P_{012}$$

- Среднее число заявок в очереди II фазы:



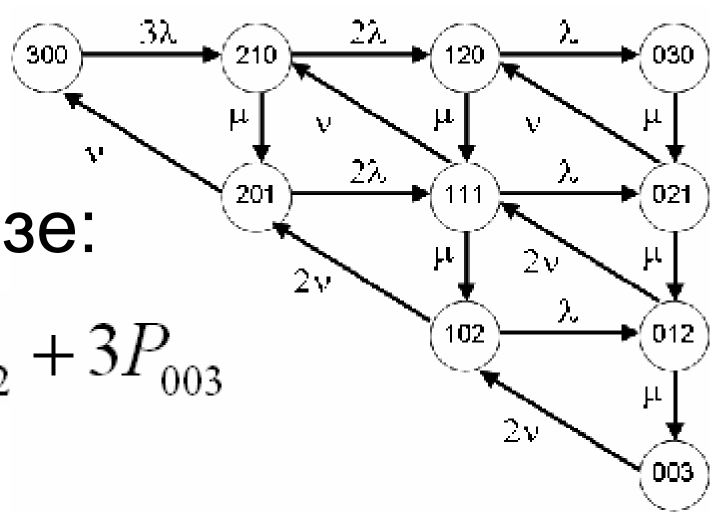
$$\overline{n_{o\ II}} = P_{120} + 2P_{030} + P_{021}$$

- Среднее число занятых каналов во II фазе:

$$\overline{K_{з\ II}} = P_{210} + P_{120} + P_{111} + P_{030} + P_{021} + P_{012}$$

Пример расчёта: замкнутая СМО

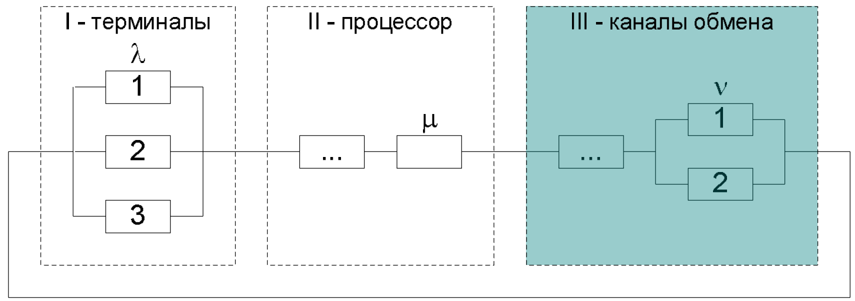
4) Расчёт показателей



- Среднее число заявок в III фазе:

$$\overline{j_{III}} = P_{201} + P_{111} + 2P_{102} + P_{021} + 2P_{012} + 3P_{003}$$

- Среднее число заявок в очереди III фазы:



$$\overline{n_{o\ III}} = P_{003}$$

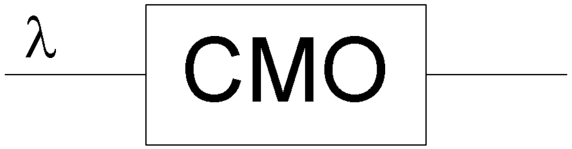
- Среднее число занятых каналов в III фазе:

$$\overline{K_{з\ III}} = P_{201} + P_{111} + 2P_{102} + P_{021} + 2P_{012} + 2P_{003}$$

Пример расчёта: замкнутая СМО

4) Расчёт показателей

- Закон Литтла – связь между количественными и временными показателями:

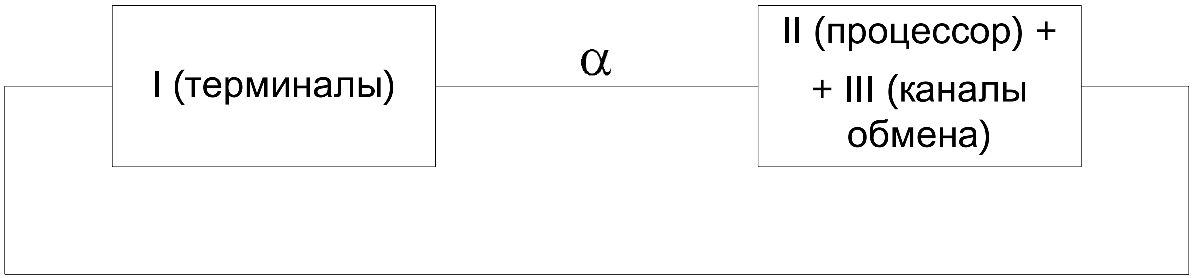


$$\overline{j} = l \cdot \overline{t_c}$$

Пример расчёта: замкнутая СМО

4) Расчёт показателей

- Закон Литтла для замкнутой системы:



$$\overline{j_{II-III}} = a \cdot \overline{t_{II-III}} = \overline{N_{терм}} \cdot l \cdot \overline{t_{реак}}$$

$$\overline{j_{II-III}} + \overline{N_{терм}} = N$$

$$\overline{t_{реак}} = \frac{N - \overline{N_{терм}}}{\overline{N_{терм}} \cdot l}$$

Пример расчёта: замкнутая СМО

Итого:

$$\overline{t_{реак}} = \frac{N - \overline{N_{терм}}}{\overline{N_{терм}} \cdot l}$$

$$\overline{N_{терм}} = 3P_{300} + 2\left(P_{210} + P_{201}\right) + \left(P_{120} + P_{111} + P_{102}\right)$$

N = 3

Пример расчёта: замкнутая СМО

Ответ:

$$\overline{t_{реак}} = \frac{1}{2mn} \cdot (2n^3m^2 + 2n^2m^3 + 4lnm^3 + 8n^3ml +$$

$$+8lm^2n^2 + 3l^2m^3 + 6l^2m^2n + 12l^2mn^2 + 12l^2n^3) \; /$$

$$\left(2l^2n^2 + 2l^2mn + m^2l^2 + 2m^2ln + 2lmn^2 + m^2n^2\right)$$

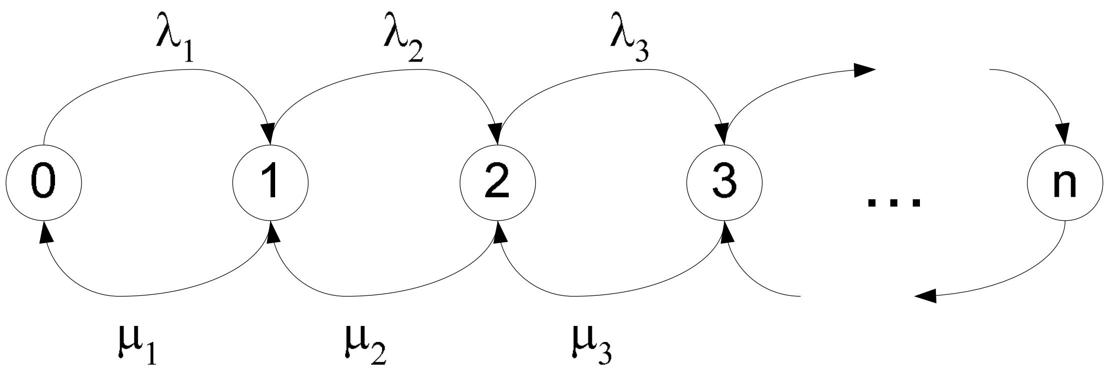
Процесс гибели и размножения

В каждый момент может либо прийти новая заявка, либо уйти старая

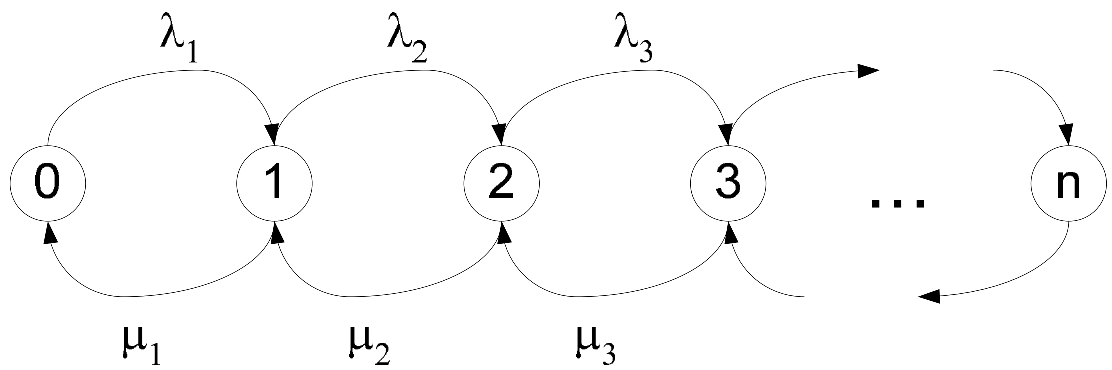
=

В каждый момент времени может либо появиться новая бактерия («размножение»), либо исчезнуть старая («гибель»)

Граф гибели и размножения:



Процесс гибели и размножения



$$P_0 l_1 = P_1 m_1$$

$$P_1 \left(l_2 + m_1 \right) = P_0 l_1 + P_2 m_2 = P_1 m_1 + P_2 m_2 \qquad P_1 l_2 = P_2 m_2$$

$$P_2 \left(l_3 + m_2 \right) = P_1 l_2 + P_3 m_3 = P_2 m_2 + P_3 m_3 \qquad P_2 l_3 = P_3 m_3$$

$$P_{i-1} l_i = P_i m_i \qquad P_i = \frac{l_i}{m_i} P_{i-1} = \prod_{j=1}^{i} \frac{l_j}{m_j} P_0$$

Процесс гибели и размножения

$$\boxed{P_i = \prod_{j=1}^{i} \frac{l_j}{m_j} P_0}$$

$$\sum_{i=0}^{n} P_i = 1 \qquad P_0 + \sum_{i=1}^{n} P_i = 1 \qquad P_0\left(1 + \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{i} \frac{l_j}{m_j}\right) = 1$$

$$\boxed{P_0 = \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{i} \frac{l_j}{m_j}\right)^{-1}}$$

Система с ограничением времени

- Двухпроцессорная управляющая система, на вход которой поступают три простейших потока с интенсивностями λ_1, λ_2, λ_3.
- Процессоры считаются однотипными со средним быстродействием $\overline{B}$
- Обслуживание требования заключается в выполнении на любом из процессоров соответствующей прикладной программы, трудоемкость случайна, закон распределения экспоненциальный, средняя трудоемкость всех трех программ равна $\overline{\Theta}$

$\lambda_1 = 6c^{-1}$ K=2

$\lambda_2 = 15c^{-1}$

$\lambda_3 = 9c^{-1}$

$\lambda=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=30c^{-1}$

$\overline{B}$ =50000 опер/сек

$\overline{\Theta}$ =2500 опер

$m = \overline{B}/\overline{\Theta}$ $=20c^{-1}$

Система с ограничением времени

- Для хранения заявок выделена буферная зона памяти емкостью в Моч ячеек, служебная информация о каждой заявке занимает Мз ячеек

Моч = 8

Мз = 2

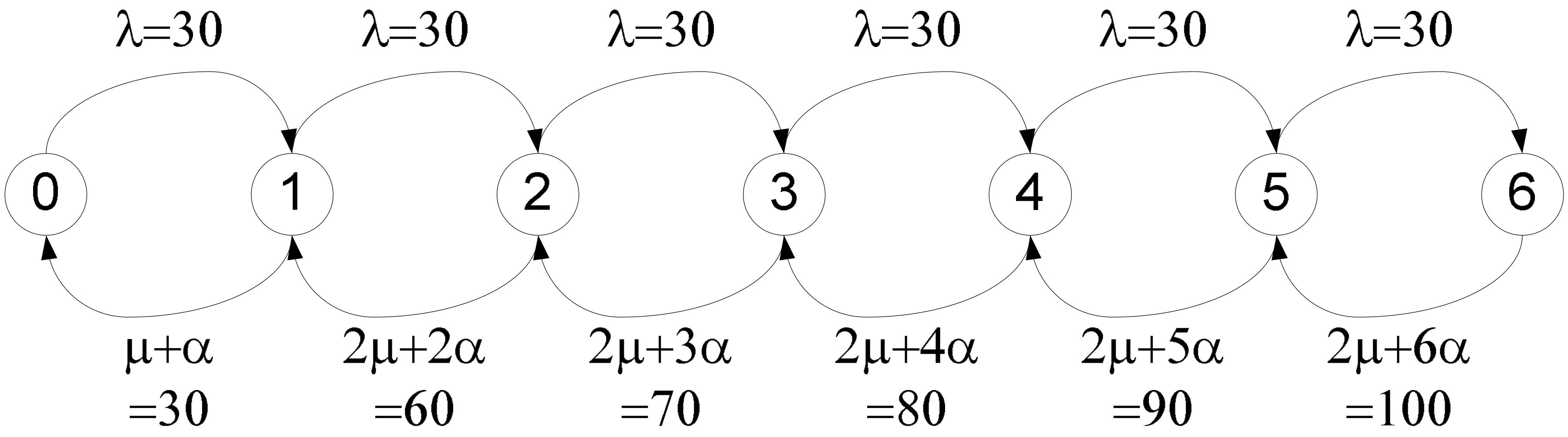
$$m = \frac{M_{оч}}{M_з} = \frac{8}{2} = 4$$

- Время пребывания заявки в системе не должно превышать случайной величины τ, распределенной экспоненциально с математическим ожиданием $\overline{t}$

$\overline{t}$ = 0,1с

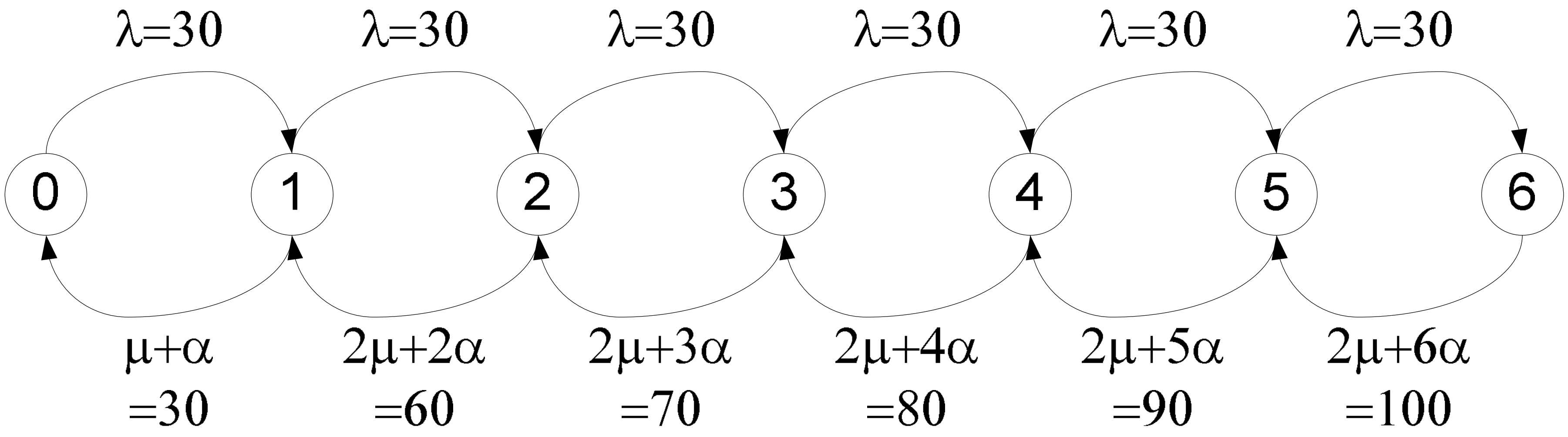
$$\alpha = \frac{1}{\overline{t}} = 10c^{-1}$$

Система с ограничением времени



- Поступление заявок: $30c^{-1}$
- Уход заявок:
  - по причине завершения обслуживания:
    $20c^{-1}$ или $40c^{-1}$ (один или два канала)
  - по причине устаревания информации:
    $10c^{-1}$ на каждую заявку в системе

Система с ограничением времени

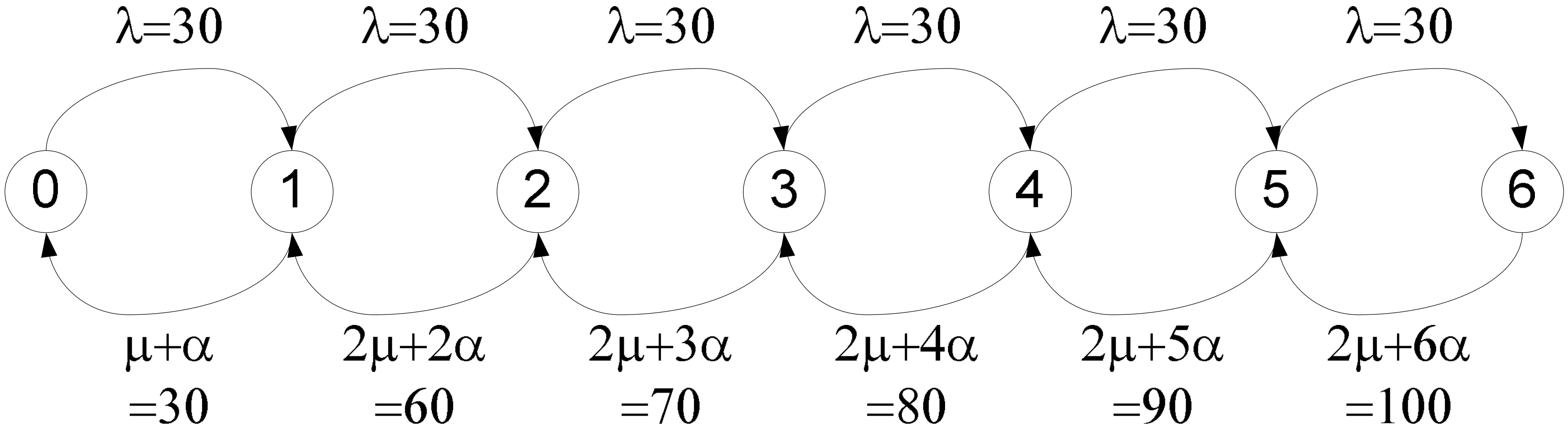


$$P_1 = \frac{l}{m+a} P_0 = \frac{30}{30} P_0 = P_0$$

$$P_2 = \frac{l}{2m+2a} P_1 = \frac{30}{60} P_0 = \frac{1}{2} P_0$$

$$P_3 = \frac{l}{2m+3a} P_2 = \frac{30}{70} \frac{1}{2} P_0 = \frac{3}{14} P_0$$

Система с ограничением времени



$$P_4 = \frac{l}{2m + 4a} P_3 = \frac{30}{80}\frac{3}{14} P_0 = \frac{9}{112} P_0$$

$$P_5 = \frac{l}{2m + 5a} P_4 = \frac{30}{90}\frac{9}{112} P_0 = \frac{3}{112} P_0$$

$$P_6 = \frac{l}{2m + 6a} P_5 = \frac{30}{100}\frac{3}{112} P_0 = \frac{9}{1120} P_0$$

Система с ограничением времени

$$P_1 = P_0$$

$$P_2 = \frac{1}{2} P_0$$

$$P_3 = \frac{3}{14} P_0$$

$$P_4 = \frac{9}{112} P_0$$

$$P_5 = \frac{3}{112} P_0$$

$$P_6 = \frac{9}{1120} P_0$$

$$P_0 = \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{14} + \frac{9}{112} + \frac{3}{112} + \frac{9}{1120}\right)^{-1}$$

$$P_0 = \frac{1120}{3169} = 0,35$$

$$P_1 = \frac{1120}{3169} = 0,35 \qquad P_4 = \frac{90}{3169} = 0,028$$

$$P_2 = \frac{560}{3169} = 0,18 \qquad P_5 = \frac{30}{3169} = 0,0095$$

$$P_3 = \frac{240}{3169} = 0,076 \qquad P_6 = \frac{9}{3169} = 0,0028$$

Система с ограничением времени

- Среднее число занятых каналов:

$$\overline{K_з} = P_1 + 2\left(P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6\right) = 0.94$$

- Среднее число заявок в очереди:

$$\overline{n_o} = P_3 + 2P_4 + 3P_5 + 4P_6 = 0,17$$

- Вероятность отказа:

$$P_{отк} = P_6 = 0,0028$$

- Вероятность ухода:
  - во время обслуживания $P_у' = \overline{K_з} \cdot a / l = 0,31$
  - из очереди $P_у'' = \overline{n_o} \cdot a / l = 0,058$

Система с ограничением времени

- Штраф за отказ:

$$e_{отк} = 3$$

- Штраф за уход:

$$e_{у} = 2$$

- Штраф за недоиспользование каналов:

$$e_{н} = 10$$

- Эффективность:

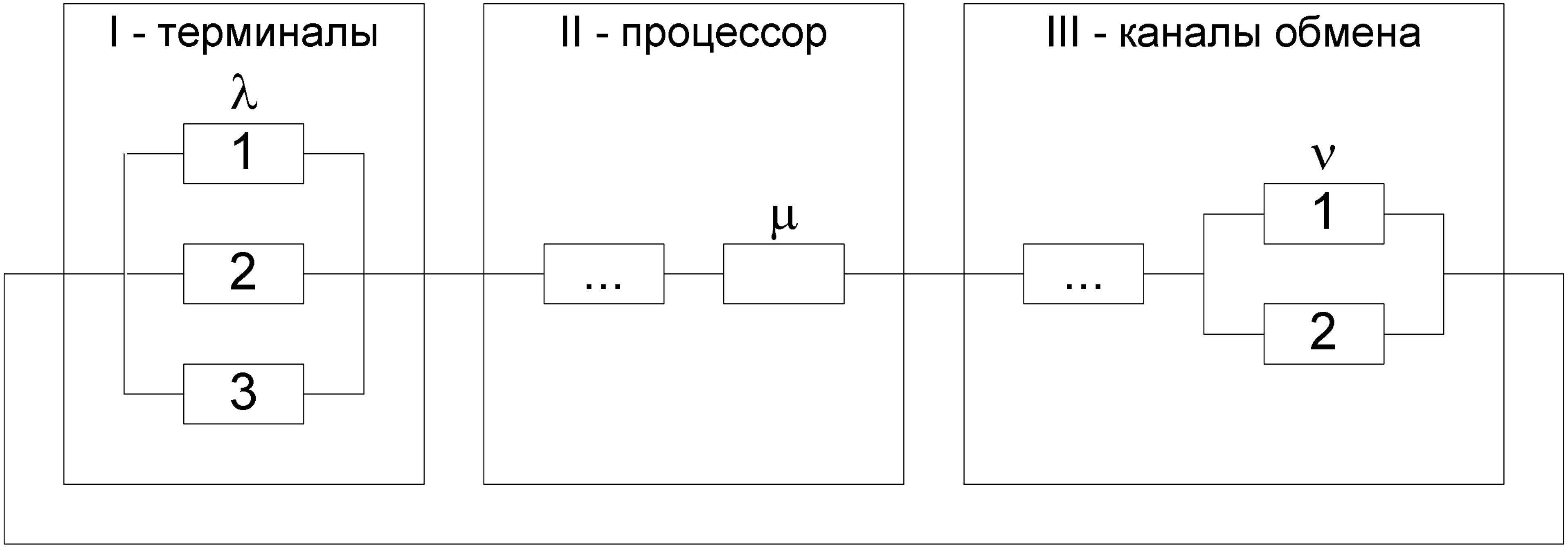
$$E = l\left(e_{отк}P_{отк} + e_{у}\left(P_{у}' + P_{у}''\right)\right) + e_{н}\left(K - \overline{K_{з}}\right) = 33$$

Система с ограничением времени

Решим ту же задачу для других значений m и K:

m	K=1	K=2	K=3	K=4
0	60	46	45	51
1	46	38	42	50
2	40	35	41	50
3	37	33	41	50
4	35	33	41	50
5	34	33	41	50
6	34	33	41	50
100	34	33	41	50

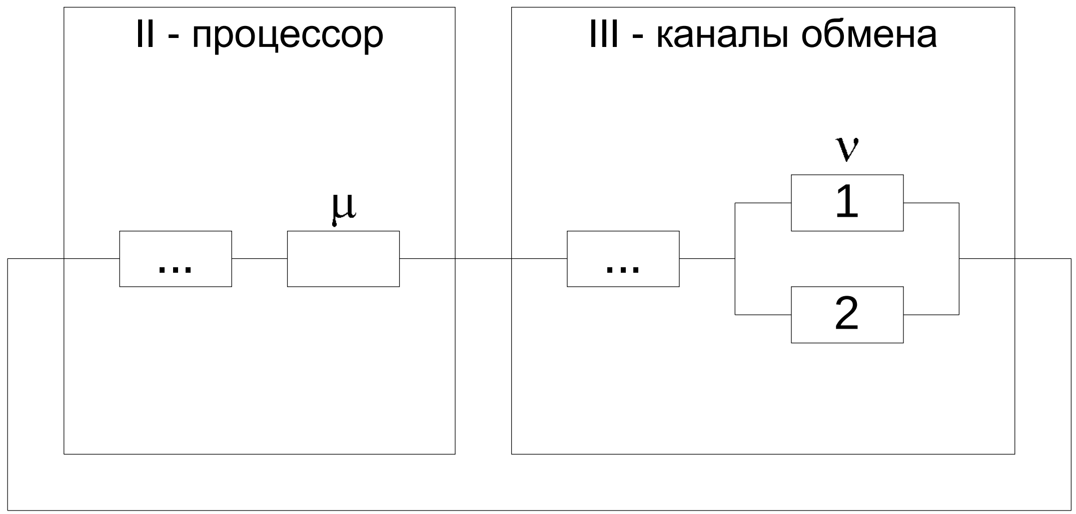
Метод частичного укрупнения моделей

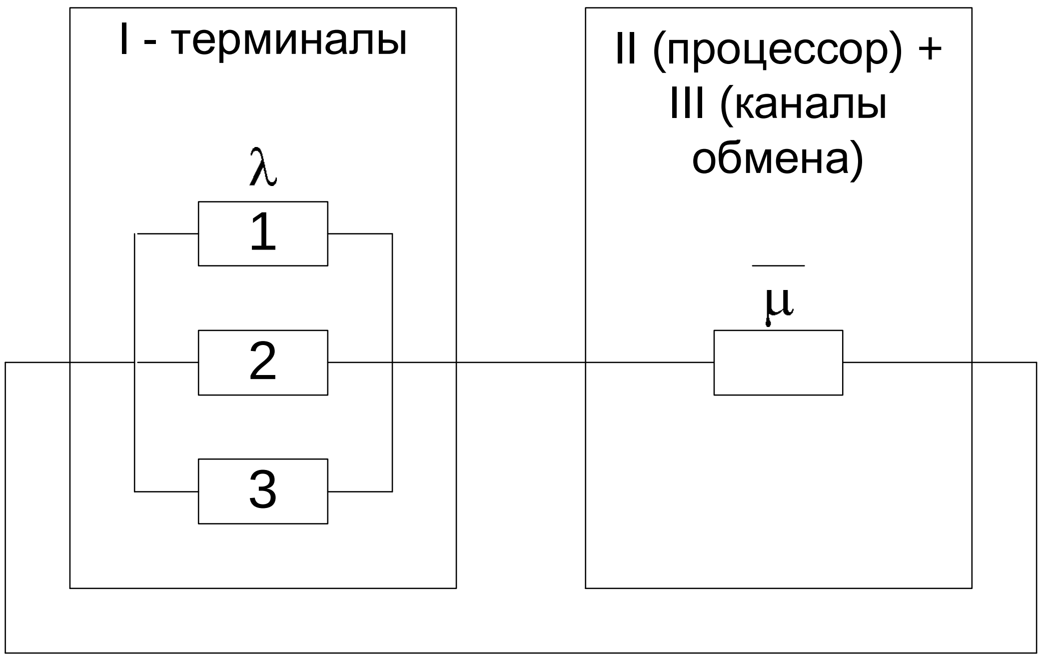


- M = 2
- N = 3
- Число заявок в системе: 3

Метод частичного укрупнения

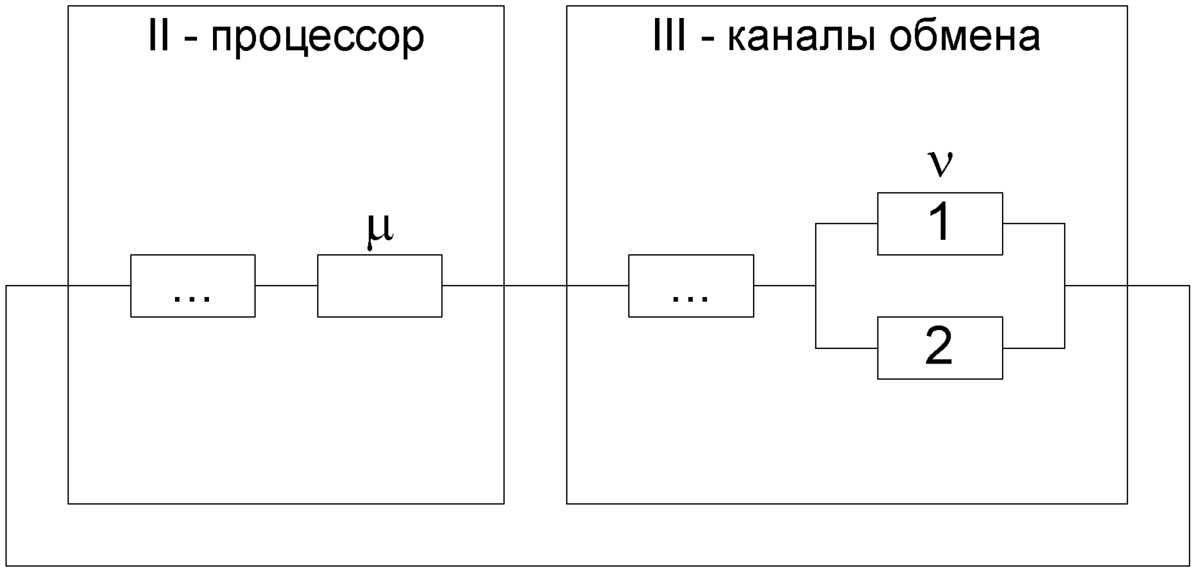
Разбиение
на подзадачи



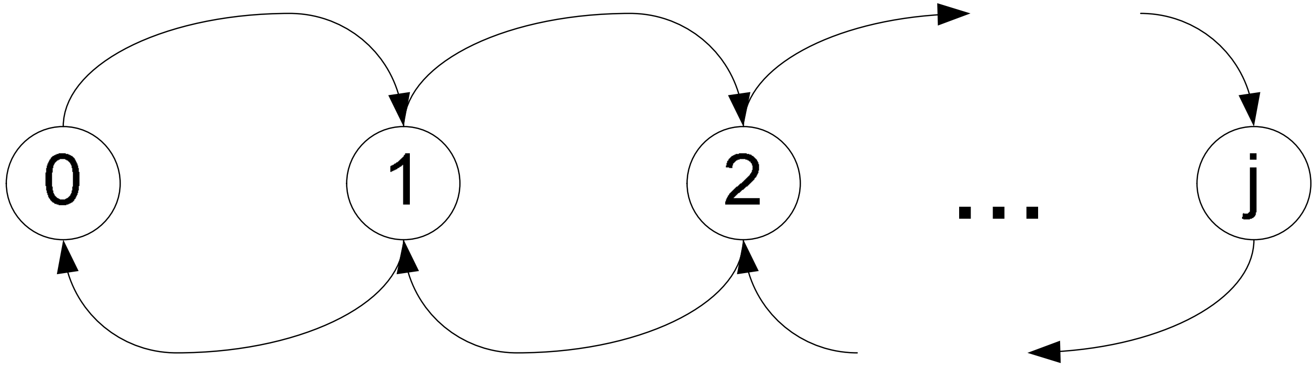


Метод частичного укрупнения

Подзадача 1

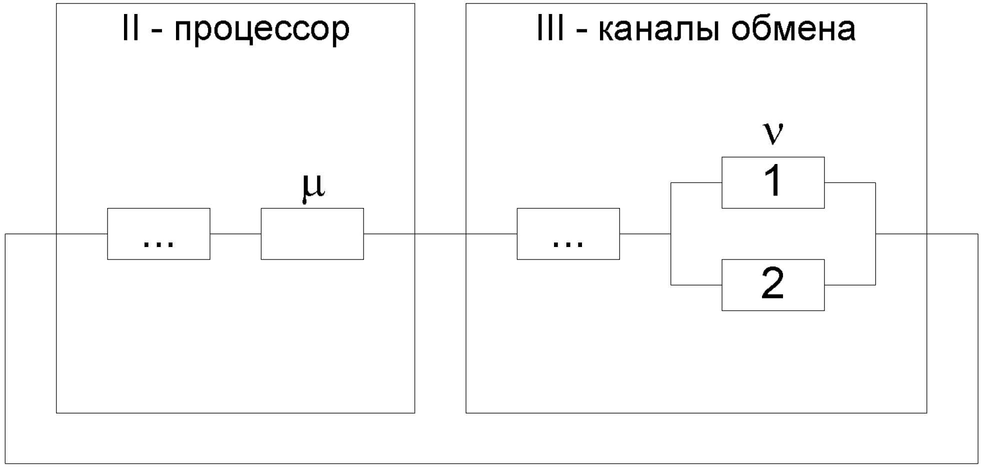


- В системе II-III всего j заявок, j=1..N

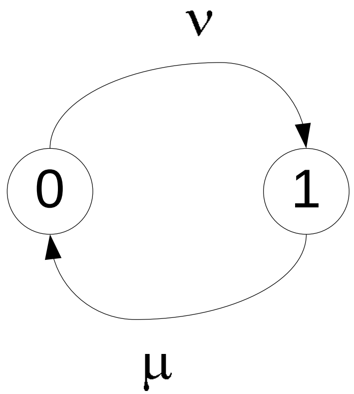


Метод частичного укрупнения

Подзадача 1



- 1) j = 1
- Состояние: i - число заявок во II фазе, i = 0..1



$$P_0 = \left(1 + \frac{n}{m}\right)^{-1} = \frac{m}{m+n}$$

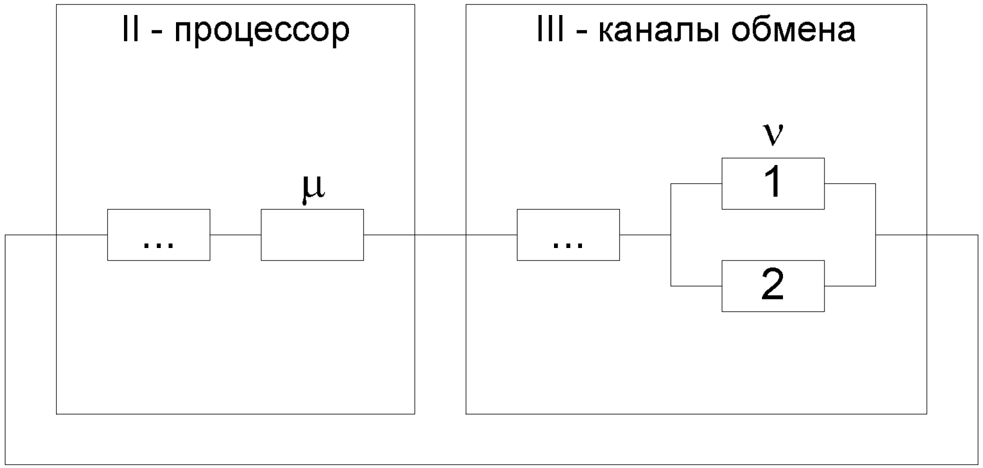
$$P_1 = \frac{n}{m+n}$$

$$\overline{K_з}^{(II)} = 1 \cdot P_1 = 1 - P_0$$

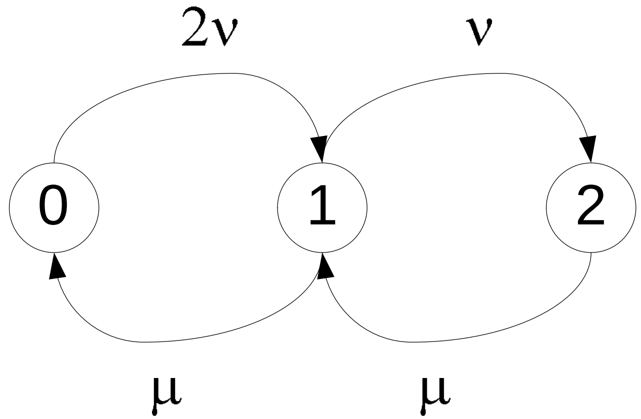
$$\overline{K_з}^{(III)} = 1 \cdot P_0$$

Метод частичного укрупнения

Подзадача 1



- 2) j = 2
- Состояние: i - число заявок во II фазе, i = 0..2



$$P_0 = \left(1 + \frac{2n}{m} + \frac{2n^2}{m^2}\right)^{-1} = \frac{m^2}{(m+n)^2 + n^2}$$

$$P_1 = \frac{2mn}{(m+n)^2 + n^2}$$

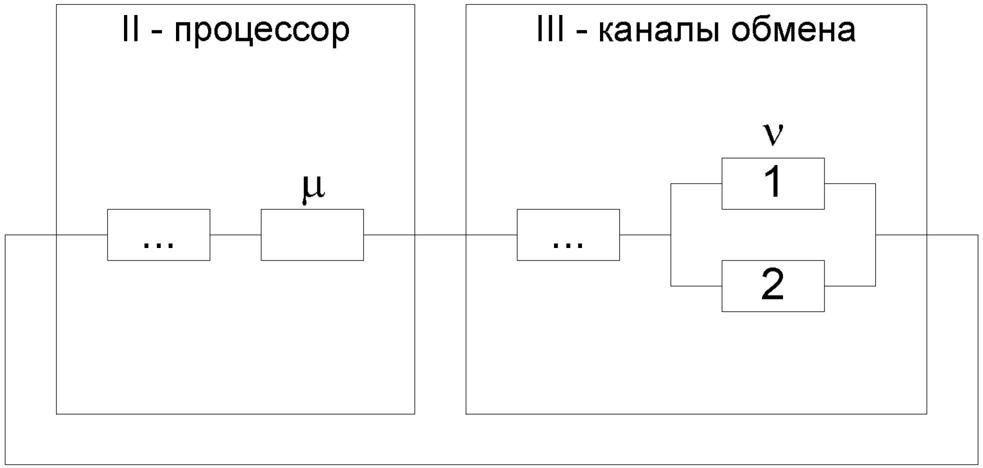
$$P_2 = \frac{n^2}{(m+n)^2 + n^2}$$

$$\overline{K_з}^{(II)} = 1 \cdot P_1 + 1 \cdot P_2 = 1 - P_0$$

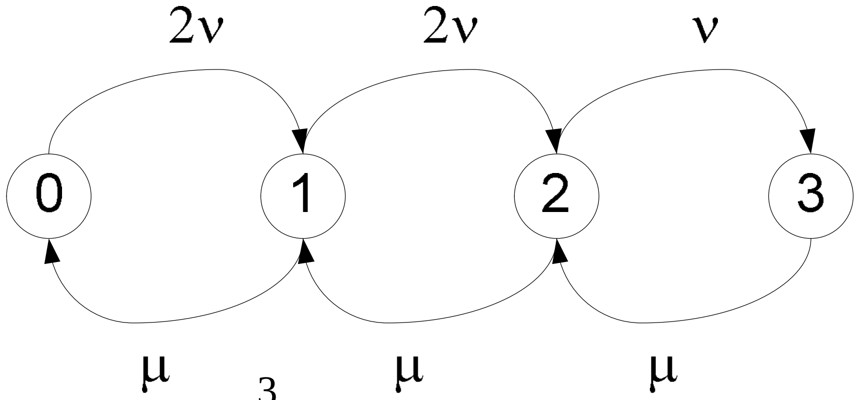
$$\overline{K_з}^{(III)} = 2 \cdot P_0 + 1 \cdot P_1$$

Метод частичного укрупнения

Подзадача 1



- 3) j = 3
- Состояние: i - число заявок во II фазе, i = 0..3



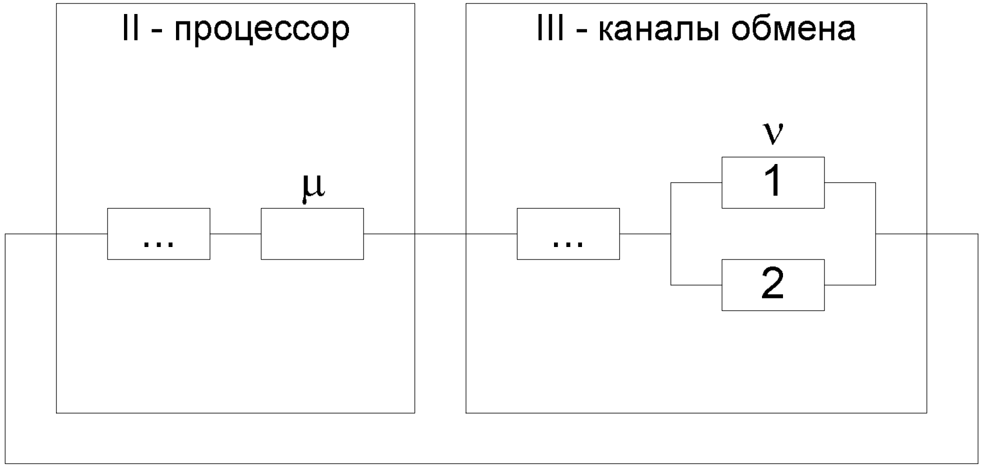
$$P_0 = \left(1 + \frac{2n}{m} + \frac{4n^2}{m^2} + \frac{4n^3}{m^3}\right)^{-1} = \frac{m^3}{m^3 + 2m^2n + 4mn^2 + 4n^3}$$

$$P_1 = \frac{2m^2n}{m^3 + 2m^2n + 4mn^2 + 4n^3}$$

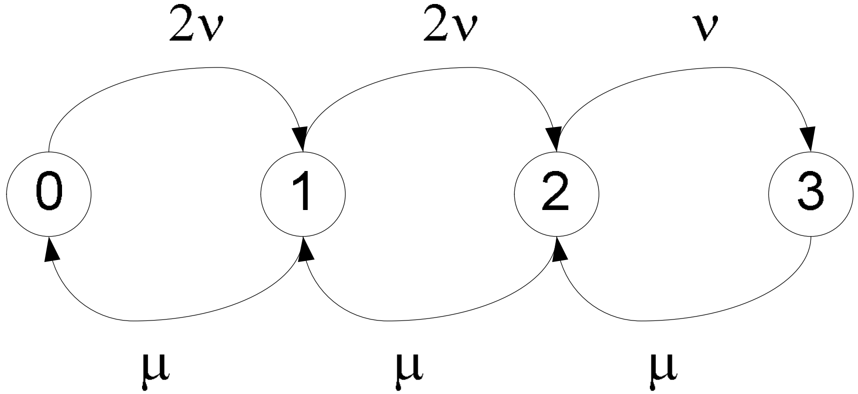
$$P_2 = \frac{4mn^2}{m^3 + 2m^2n + 4mn^2 + 4n^3} \qquad P_3 = \frac{4n^3}{m^3 + 2m^2n + 4mn^2 + 4n^3}$$

Метод частичного укрупнения

Подзадача 1



- 3) j = 3
- Состояние: i - число заявок во II фазе, i = 0..3

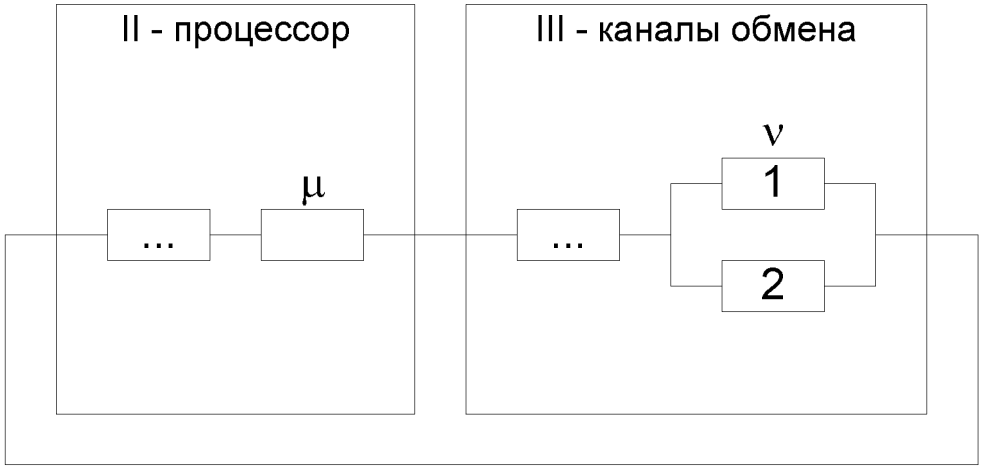


$$\overline{K_з}^{(II)} = 1 \cdot P_1 + 1 \cdot P_2 + 1 \cdot P_3 = 1 - P_0$$

$$\overline{K_з}^{(III)} = 2 \cdot P_0 + 2 \cdot P_1 + 1 \cdot P_2$$

Метод частичного укрупнения

Подзадача 1



$$\bar{m} = \overline{K_з}^{(II)} m = \overline{K_з}^{(III)} n$$

$$\overline{K_з}^{(II)} = 1 - P_0$$

$$\bar{m} = \left(1 - P_0\right) m$$

Метод частичного укрупнения

Подзадача 1

$$\overline{m} = \left(1 - P_0\right) m$$

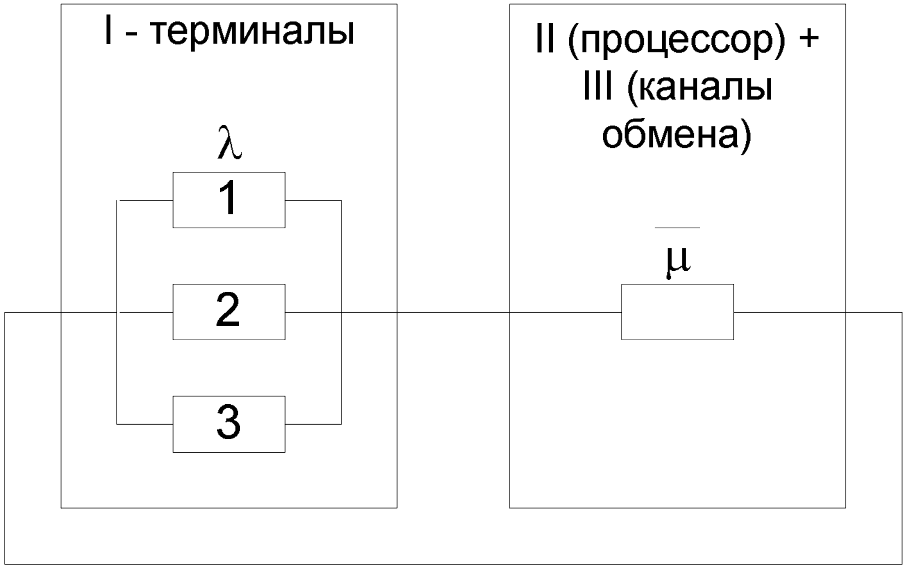
$$P_0^{(1)} = \frac{m}{m+n} \qquad \overline{m_1} = \frac{mn}{m+n}$$

$$P_0^{(2)} = \frac{m^2}{(m+n)^2 + n^2} \qquad \overline{m_2} = \frac{2mn(m+n)}{(m+n)^2 + n^2}$$

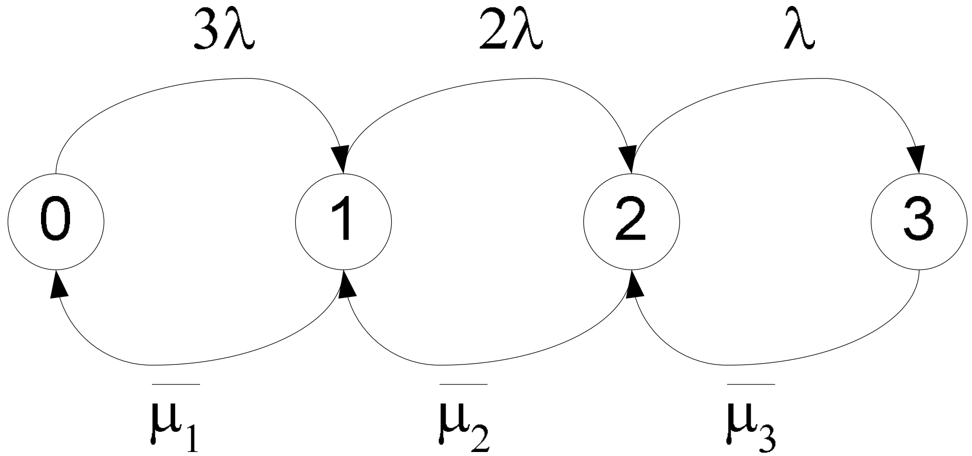
$$P_0^{(3)} = \frac{m^3}{m^3 + 2m^2 n + 4mn^2 + 4n^3} \qquad \overline{m_3} = \frac{2mn\left((m+n)^2 + n^2\right)}{m^3 + 2m^2 n + 4mn^2 + 4n^3}$$

Метод частичного укрупнения

Подзадача 2



- Состояние: i - число заявок во II-III фазе

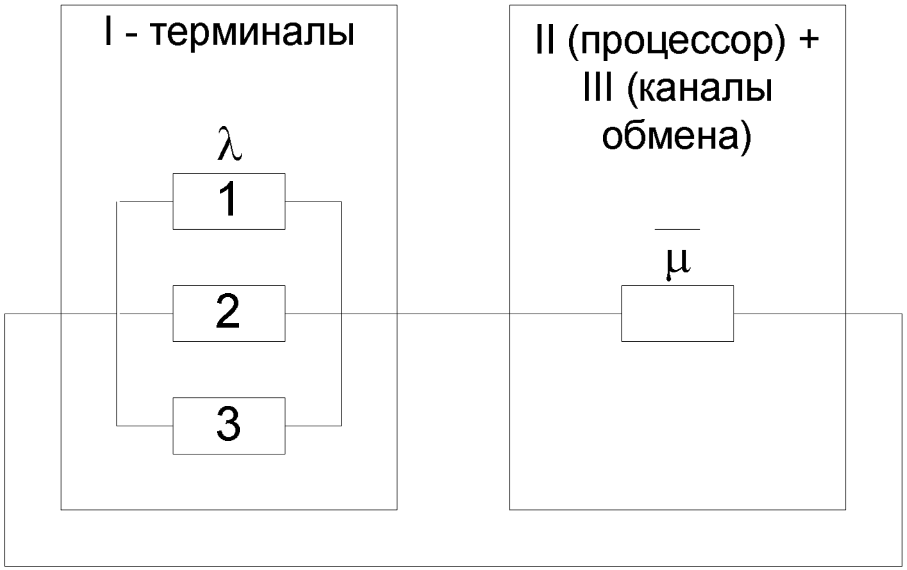


$$P_0 = \left(1 + \frac{3l}{\overline{m}_1} + \frac{6l^2}{\overline{m}_1 \cdot \overline{m}_2} + \frac{6l^3}{\overline{m}_1 \cdot \overline{m}_2 \cdot \overline{m}_3}\right)^{-1}$$

$$P_1 = \frac{3l}{\overline{m}_1} P_0 \qquad P_2 = \frac{6l^2}{\overline{m}_1 \cdot \overline{m}_2} P_0 \qquad P_3 = \frac{6l^3}{\overline{m}_1 \cdot \overline{m}_2 \cdot \overline{m}_3} P_0$$

Метод частичного укрупнения

Подзадача 2



- Состояние: i - число заявок во II-III фазе

$$P_0 = \left(1 + \frac{3l}{\overline{m}_1} + \frac{6l^2}{\overline{m}_1 \cdot \overline{m}_2} + \frac{6l^3}{\overline{m}_1 \cdot \overline{m}_2 \cdot \overline{m}_3}\right)^{-1}$$

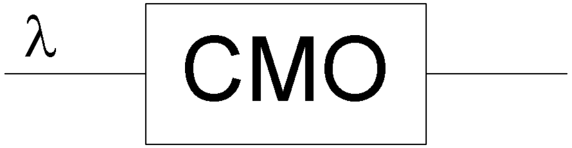
$$P_1 = \frac{3l}{\overline{m}_1} P_0 \qquad P_2 = \frac{6l^2}{\overline{m}_1 \cdot \overline{m}_2} P_0$$

$$P_3 = \frac{6l^3}{\overline{m}_1 \cdot \overline{m}_2 \cdot \overline{m}_3} P_0$$

$$\overline{j_{II-III}} = P_1 + 2P_2 + 3P_3$$

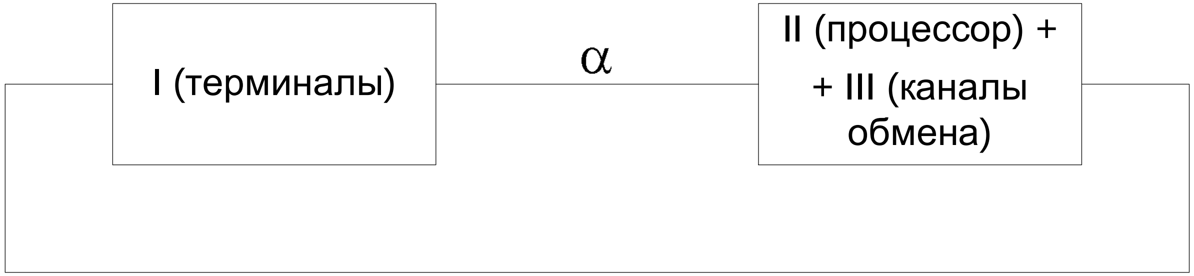
Метод частичного укрупнения

- Закон Литтла:



$$\overline{j} = l \cdot \overline{t_c}$$

- Замкнутая система



$$\overline{j_{II-III}} = a \cdot \overline{t_{II-III}} = \overline{N_{терм}} \cdot l \cdot \overline{t_{реак}}$$

$$\overline{j_{II-III}} + \overline{N_{терм}} = N$$

$$\overline{t_{реак}} = \frac{\overline{j_{II-III}}}{\left(N - \overline{j_{II-III}}\right) \cdot l}$$

Метод частичного укрупнения

Ответ

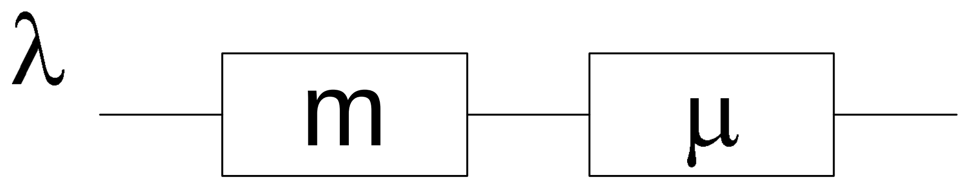
$$\overline{t_{реак}} = \frac{1}{2mn} \cdot (2n^3m^2 + 2n^2m^3 + 4lnm^3 + 8n^3ml +$$

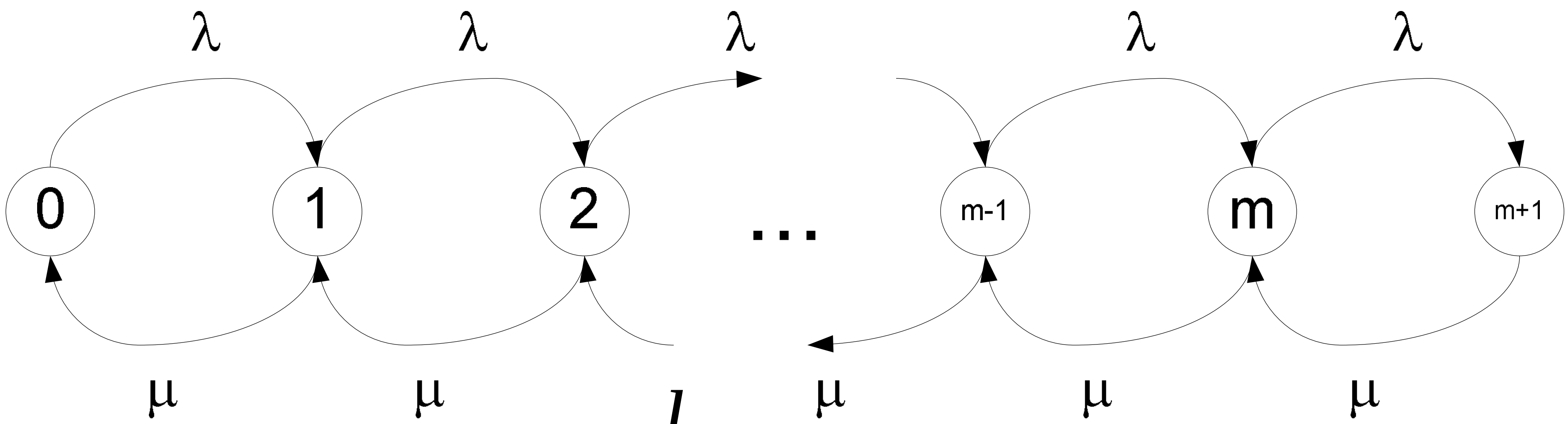
$$+8lm^2n^2 + 3l^2m^3 + 6l^2m^2n + 12l^2mn^2 + 12l^2n^3) \ /$$

$$\left(2l^2n^2 + 2l^2mn + m^2l^2 + 2m^2ln + 2lmn^2 + m^2n^2\right)$$

Простейшие СМО

M / M / 1 / m





$$r = \frac{l}{m}$$

$r < 1$ – условие стабильности (устойчивости)

Простейшие СМО

M / M / 1 / m

$$P_i = P_0 \cdot r^{i}$$

$$P_0 = \left(1 + \sum_{i=1}^{m+1} r^{i}\right)^{-1} \qquad \sum_{i=1}^{m+1} r^{i} = \frac{r\left(1 - r^{m+1}\right)}{1 - r}$$

$$P_0 = \left(1 + \frac{r\left(1 - r^{m+1}\right)}{1 - r}\right)^{-1} = \frac{1 - r}{1 - r + r - r^{m+2}}$$

$$\boxed{P_0 = \frac{1 - r}{1 - r^{m+2}} \xrightarrow[m \to \infty]{} 1 - r}$$

Простейшие СМО

M / M / 1 / m

$$\overline{j} = P_1 + 2P_2 + 3P_3 + \ldots + mP_m + (m+1)P_{m+1}$$

$$\overline{n_o} = P_2 + 2P_3 + 3P_4 + \ldots + (m-1)P_m + mP_{m+1} =$$
$$= \rho P_1 + 2\rho P_2 + 3\rho P_3 + \ldots + (m-1)\rho P_{m-1} + m\rho P_m =$$
$$= \rho\left(\overline{j} - (m+\mathbf{1})P_{m+1}\right)$$

$$\rho\overline{j} - \overline{n_o} = \rho(m+1)P_{m+1} = \rho(m+1)\rho^{m+1}P_0$$

$$\overline{j} - \overline{n_o} = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_m + P_{m+1} = 1 - P_0$$

Простейшие СМО

M / M / 1 / m

$$r\,\overline{j}-\overline{n_o}=(m+1)\,r^{m+2}P_0$$

$$\overline{j}-\overline{n_o}=1-P_0$$

$$\overline{j}=\frac{1-P_0-(m+1)\,r^{m+2}P_0}{1-r} \qquad P_0=\frac{1-r}{1-r^{m+2}}$$

$$\boxed{\overline{j}=\frac{r-(2+m-r-mr)\,r^{m+2}}{(1-r)\left(1-r^{m+2}\right)}\xrightarrow[m\to\infty]{}\frac{r}{1-r}}$$

Простейшие СМО

M / M / 1 / m

$$\overline{j} - \overline{n_o} = 1 - P_0 \qquad \overline{n_o} = \overline{j} - \left(1 - P_0\right)$$

$$\overline{j} = \frac{r - \left(2 + m - r - mr\right) r^{m+2}}{\left(1 - r\right)\left(1 - r^{m+2}\right)} \qquad P_0 = \frac{1 - r}{1 - r^{m+2}}$$

$$\boxed{\overline{n_o} = r^2 \frac{1 - \left(1 + m - mr\right) r^m}{\left(1 - r\right)\left(1 - r^{m+2}\right)} \xrightarrow[m \to \infty]{} \frac{r^2}{1 - r}}$$

Простейшие СМО

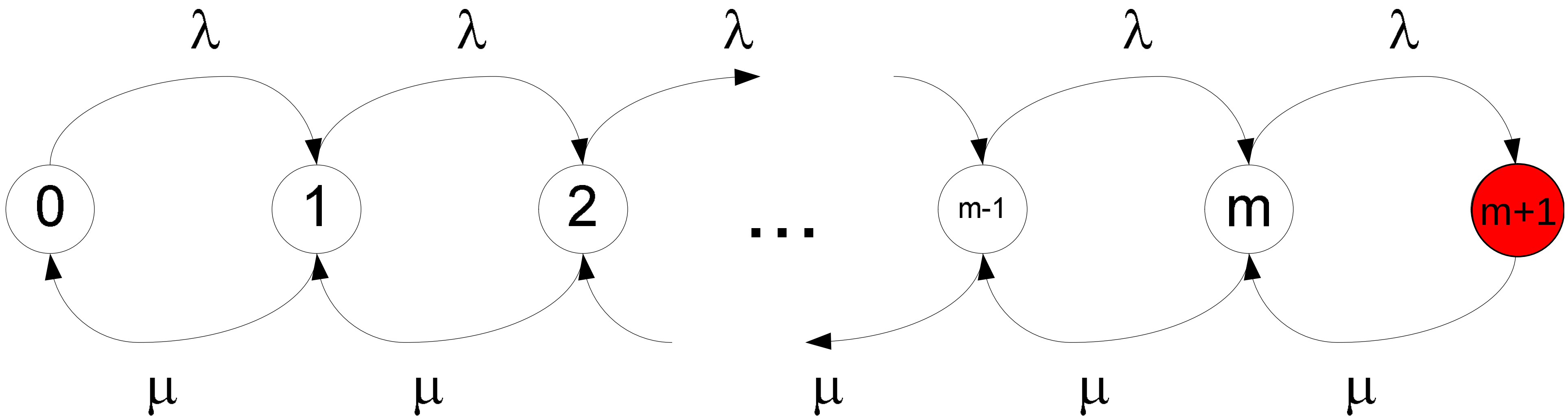
M / M / 1 / m

$$\overline{t_o} = \frac{\overline{n_o}}{l} = \frac{r}{m} \cdot \frac{1-\left(1+m-mr\right)r^{m}}{\left(1-r\right)\left(1-r^{m+2}\right)} \xrightarrow[m\to\infty]{} \frac{r}{m\left(1-r\right)}$$

$$\overline{t_c} = \frac{\overline{j}}{l} = \frac{1-\left(2+m-r-mr\right)r^{m+1}}{m\left(1-r\right)\left(1-r^{m+2}\right)} \xrightarrow[m\to\infty]{} \frac{1}{m\left(1-r\right)}$$

Простейшие СМО

M / M / 1 / m



$$P_{отк} = P_{m+1} = P_0 r^{m+1} = \frac{1-r}{1-r^{m+2}} r^{m+1} \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$$

M / M / 1 / m

$$P_0 = \frac{1 - r}{1 - r^{m+2}}$$

$$\overline{j} = \frac{r - (2 + m - r - mr)\, r^{m+2}}{(1 - r)(1 - r^{m+2})}$$

$$\overline{n_o} = r^2 \frac{1 - (1 + m - mr)\, r^m}{(1 - r)(1 - r^{m+2})}$$

$$\overline{t_c} = \frac{1 - (2 + m - r - mr)\, r^{m+1}}{m(1 - r)(1 - r^{m+2})}$$

$$\overline{t_o} = \frac{r}{m} \cdot \frac{1 - (1 + m - mr)\, r^m}{(1 - r)(1 - r^{m+2})}$$

$$P_{отк} = \frac{1 - r}{1 - r^{m+2}}\, r^{m+1}$$

M / M / 1

$$P_0 = 1 - r \qquad P_j = (1 - r)\, r^{j}$$

$$\overline{j} = \frac{r}{1 - r} \qquad \overline{t_c} = \frac{1}{m(1 - r)}$$

$$\overline{n_o} = \frac{r^{2}}{1 - r} \qquad \overline{t_o} = \frac{r}{m(1 - r)}$$

$$P_{отк} = 0$$

Простейшие СМО

M / M / K

$$P_0 = \left[1 + \sum_{j=1}^{K} \frac{r^{\,j}}{j!} + \frac{r^{\,K+1}}{K!\left(K - r\right)} \right]^{-1}$$

$$r_c = \frac{l}{Km}$$

$$\overline{n_o} = \frac{r^{\,K+1} P_0}{K\left(1 - r_c\right)^2 K!}$$

$$P_j = \begin{cases} \dfrac{r^{\,j} P_0}{j!}, j \le K \\ \dfrac{r^{\,j} P_0}{K!K^{\,j-K}}, j > K \end{cases}$$

$$\overline{t_o} = \frac{\overline{n_o}}{l} = \frac{\overline{n_o}}{rm}$$

$$\overline{j} = \overline{n_o} + r$$

$$P_{отк} = 0$$

$$\overline{t_c} = \frac{\overline{j}}{l} = \frac{\overline{j}}{rm} = \overline{t_o} + \frac{1}{m}$$

Простейшие СМО

M / M / 2

$K=2$

$$P_0=\left[1+\sum_{j=1}^{K}\frac{r^j}{j!}+\frac{r^{K+1}}{K!\left(K-r\right)}\right]^{-1}=\left[1+\frac{r}{1}+\frac{r^2}{2}+\frac{r^3}{2\left(2-r\right)}\right]^{-1}=$$

$$=\frac{2\left(2-r\right)}{4-2r+4r-2r^2+2r^2-r^3+r^3}=\frac{2\left(2-r\right)}{4+2r}$$

$$\boxed{P_0=\frac{2-r}{2+r}}$$

$$P_1=\frac{2-r}{2+r}r$$

$$P_j=\frac{r^jP_0}{2^{j-1}},\ j>2$$

$$P_2=\frac{2-r}{2+r}r^2$$

Простейшие СМО

M / M / 2

$$\overline{n_o} = \frac{r^3 P_0}{2\left(1 - \frac{r}{2}\right)^2 2} = \frac{r^3}{(2-r)^2}\frac{2-r}{2+r}$$

$$\boxed{\overline{n_o} = \frac{r^3}{4-r^2}}$$

$$\overline{t_o} = \frac{\overline{n_o}}{rm} = \frac{r^2}{m\left(4-r^2\right)}$$

$$\overline{j} = \overline{n_o} + r = r + \frac{r^3}{4-r^2} = \frac{4r - r^3 + r^3}{4-r^2}$$

$$\boxed{\overline{j} = \frac{4r}{4-r^2}}$$

$$\overline{t_c} = \frac{\overline{j}}{rm} = \frac{4}{m\left(4-r^2\right)}$$

M / M / 2

$$P_0 = \frac{2-r}{2+r}$$

$$\overline{j} = \frac{4r}{4-r^2}$$

$$\overline{t_c} = \frac{4}{m\left(4-r^2\right)}$$

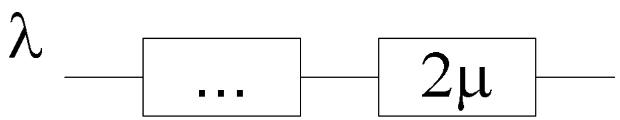
$$\overline{n_o} = \frac{r^3}{4-r^2}$$

$$\overline{t_o} = \frac{r^2}{m\left(4-r^2\right)}$$

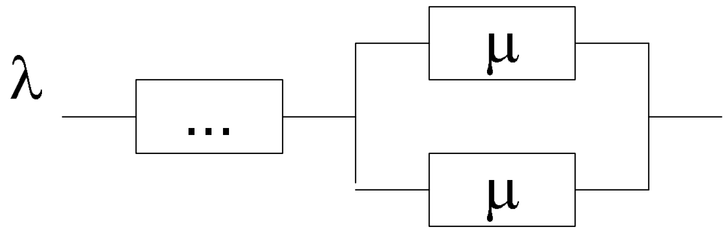
Задача сравнения

Сравнить:

M / M / 1



M / M / 2



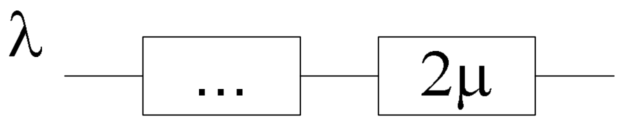
Критерии сравнения:

$$\overline{n_o}$$

$$\overline{t_c}$$

Задача сравнения

M / M / 1



$$m_1 = 2m$$

$$r_1 = \frac{l}{2m} = \frac{r}{2}$$

$$\overline{n}_{o\,1} = \frac{r_1^2}{1 - r_1}$$

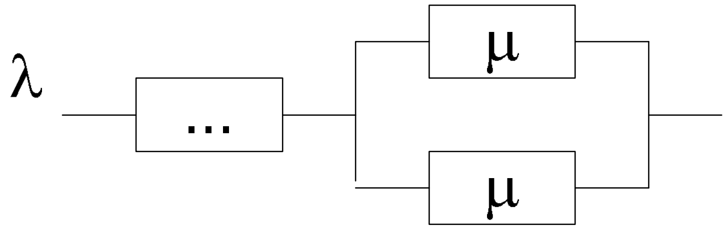
$$\overline{t}_{c\,1} = \frac{1}{m_1\left(1 - r_1\right)}$$

$$r = \frac{l}{m}$$

$$l < 2m$$

$$0 < r < 2$$

M / M / 2



$$m_2 = m$$

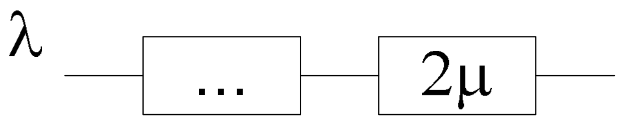
$$r_2 = \frac{l}{m} = r$$

$$\overline{n}_{o\,2} = \frac{r_2^3}{4 - r_2^2}$$

$$\overline{t}_{c\,2} = \frac{4}{m_2\left(4 - r_2^2\right)}$$

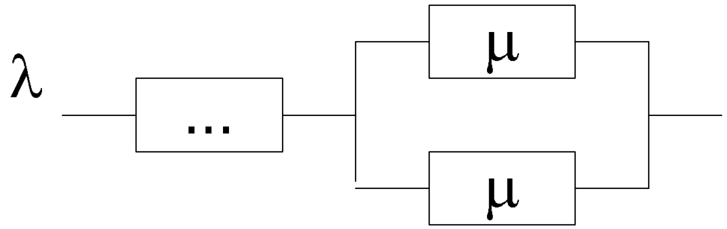
Задача сравнения

M / M / 1



$$r_1 = \frac{r}{2}$$

M / M / 2



$$r_2 = r$$

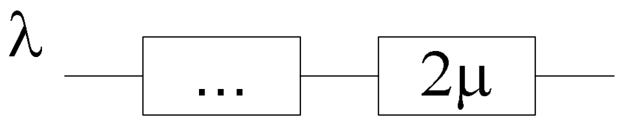
$$\overline{n_{o_1}} = \frac{r_1^2}{1 - r_1} = \frac{r^2/4}{1 - r/2} = \frac{r^2}{2(2 - r)}$$

$$\overline{n_{o_2}} = \frac{r_2^3}{4 - r_2^2} = \frac{r^3}{(2 - r)(2 + r)}$$

$$\overline{n_{o_1}}/\overline{n_{o_2}} = \frac{r^2}{2(2 - r)} \frac{(2 - r)(2 + r)}{r^3} = \frac{2 + r}{2r}$$

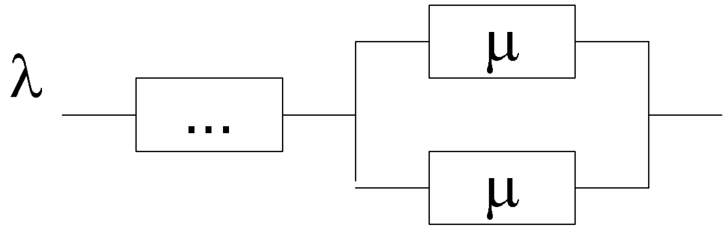
Задача сравнения

M / M / 1



$$m_1 = 2m \qquad r_1 = \frac{r}{2}$$

M / M / 2



$$m_2 = m \qquad r_2 = r$$

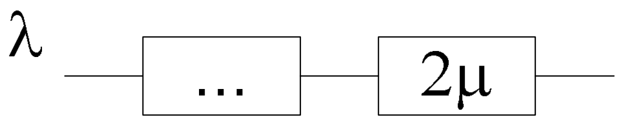
$$\overline{t_{c_1}} = \frac{1}{m_1\left(1 - r_1\right)} = \frac{1}{2m\left(1 - r/2\right)} = \frac{1}{m\left(2 - r\right)}$$

$$\overline{t_{c_2}} = \frac{4}{m_2\left(4 - r_2^2\right)} = \frac{4}{m\left(2 - r\right)\left(2 + r\right)}$$

$$\overline{t_{c_1}} \Big/ \overline{t_{c_2}} = \frac{1}{m\left(2 - r\right)} \frac{m\left(2 - r\right)\left(2 + r\right)}{4} = \frac{2 + r}{4}$$

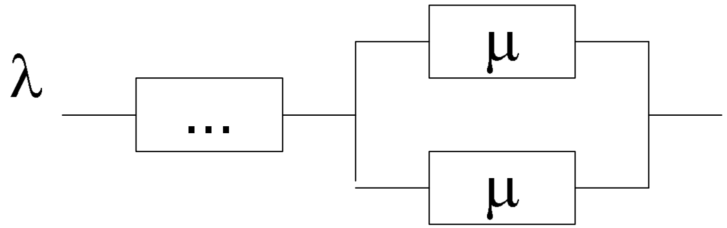
Задача сравнения

M / M / 1



$$0 < r < 2$$

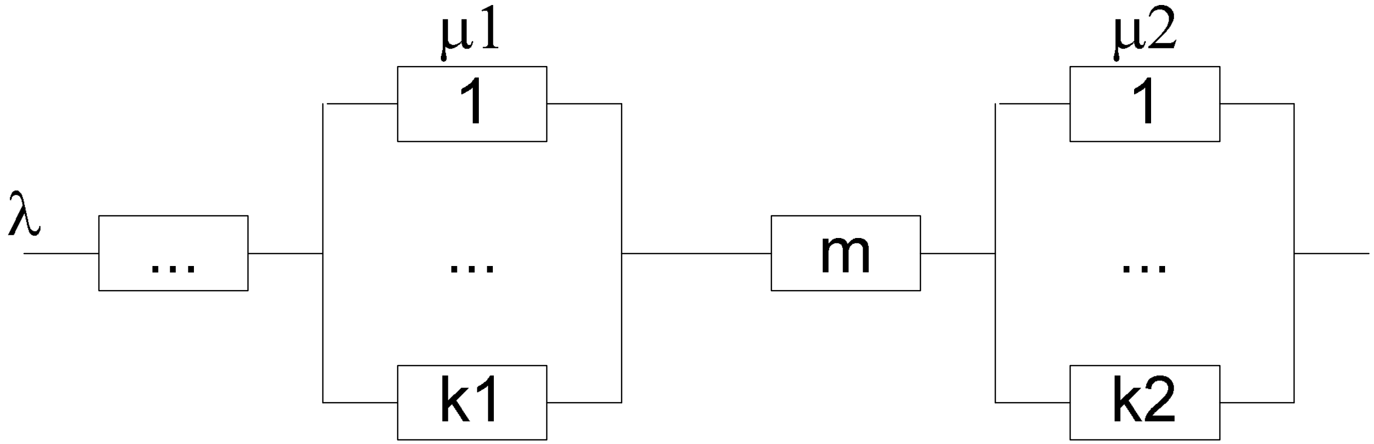
M / M / 2



$$\overline{n}_{o_1} \big/ \overline{n}_{o_2} = \frac{2+r}{2r} > 1 \qquad \overline{n}_{o_1} > \overline{n}_{o_2}$$

$$\overline{t}_{c_1} \big/ \overline{t}_{c_2} = \frac{2+r}{4} < 1 \qquad \overline{t}_{c_1} < \overline{t}_{c_2}$$

Двухфазная СМО с блокировкой



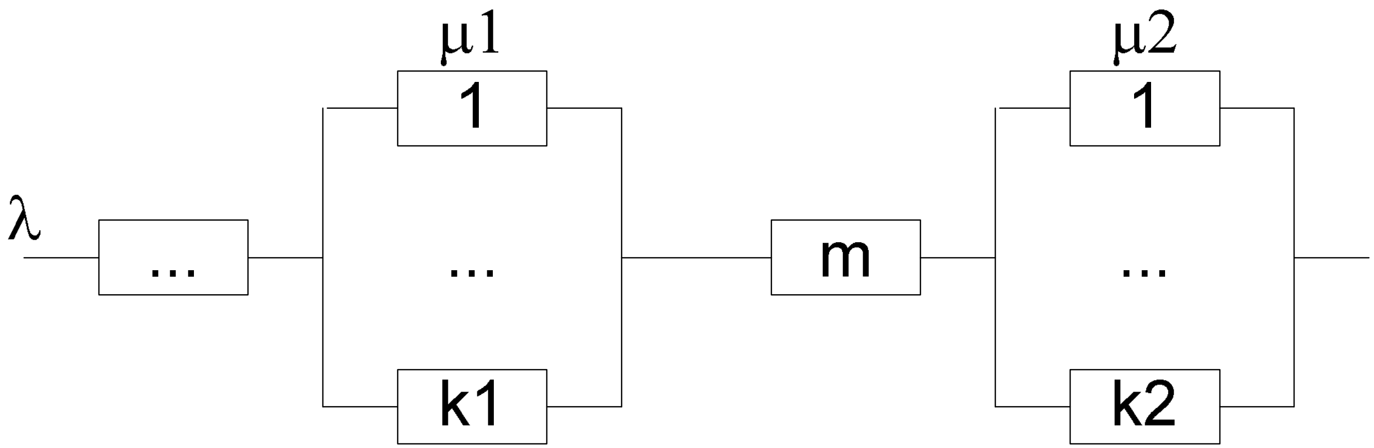
- Блокировка:

  если заявка, обслуженная в I фазе,

  не может перейти во II фазу,

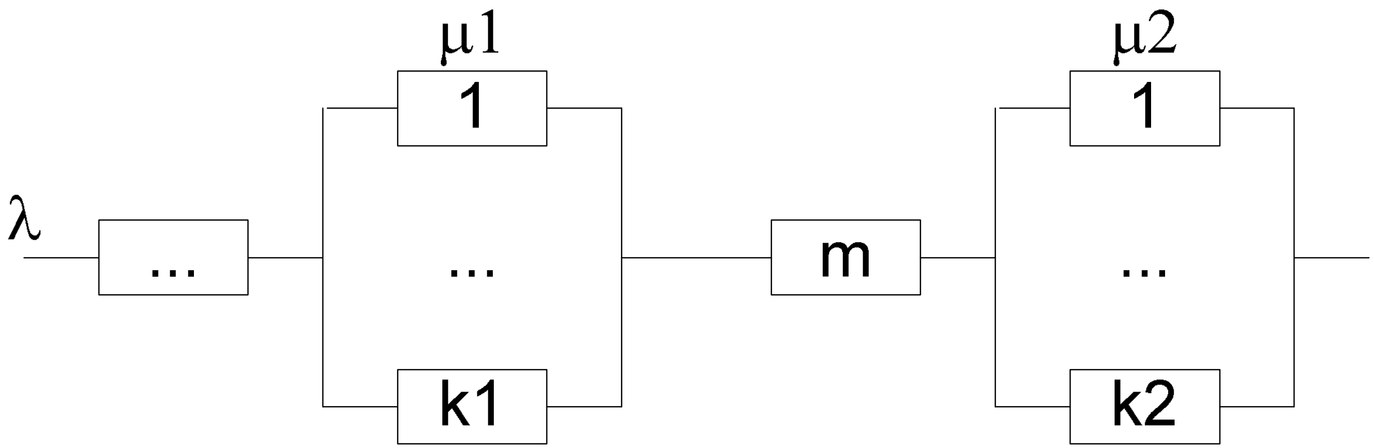
  то она остается ждать в приборе I фазы, блокируя его

Двухфазная СМО с блокировкой



- Режим слабых нагрузок – очередь во второй фазе никогда не заполняется до конца
- Режим сильных нагрузок – всегда есть очередь в первой фазе
- Режим средних нагрузок

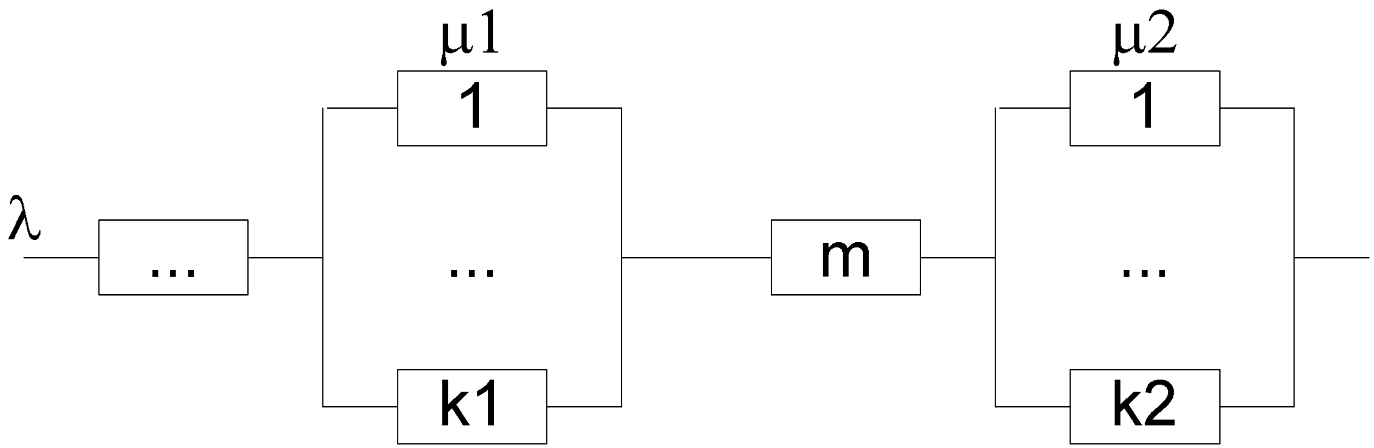
Двухфазная СМО с блокировкой



- Режим слабых нагрузок:

  очередь перед каналами второй фазы никогда не заполняется до конца
- Решение: две последовательные СМО типа M / M / k1 и M / M / k2

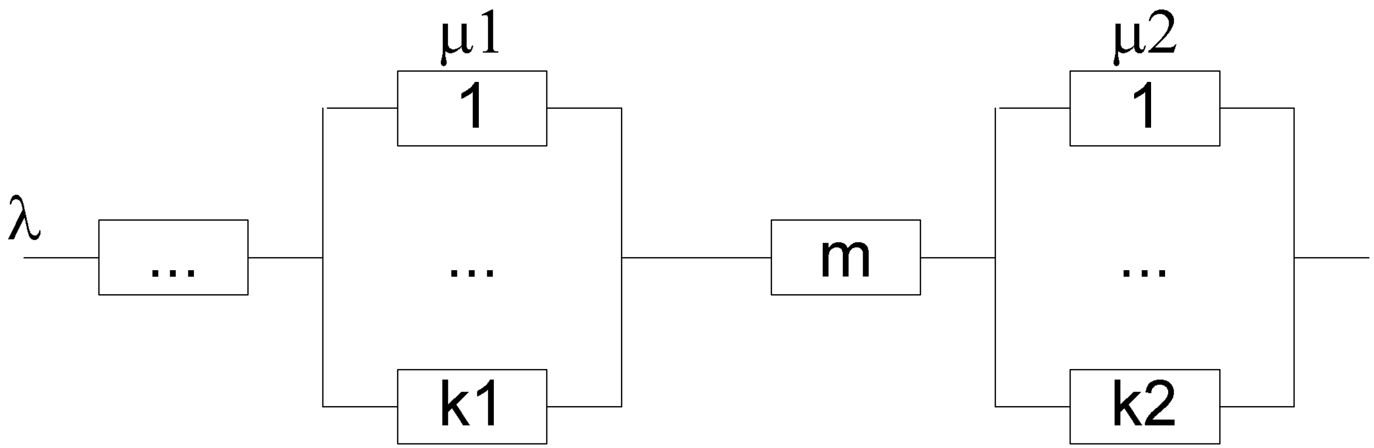
Двухфазная СМО с блокировкой



- Режим средних нагрузок
- Решение: ???

  возможно, двумерный бесконечный граф…

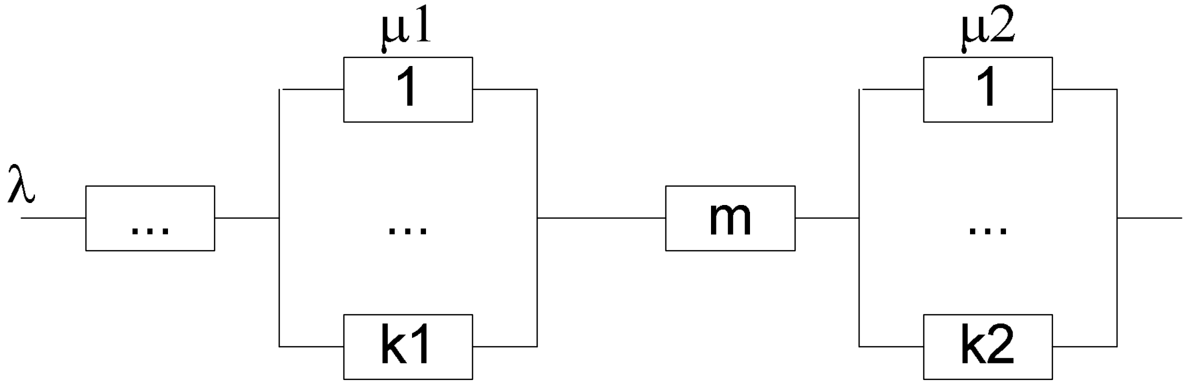
Двухфазная СМО с блокировкой



- Режим сильных нагрузок:

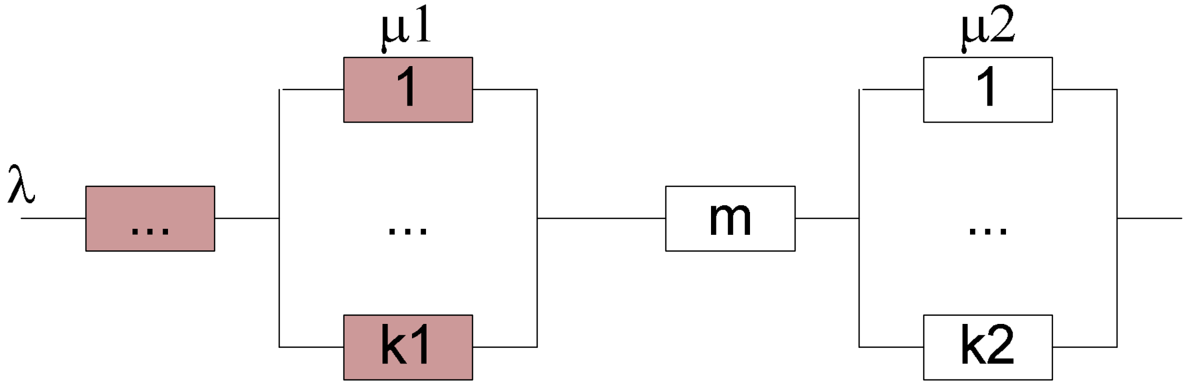
  всегда есть очередь в первой фазе
- Решение: граф гибели-размножения

Двухфазная СМО с блокировкой



- Состояние: i – число заявок II фазы, включая заявки, заблокированные в I фазе

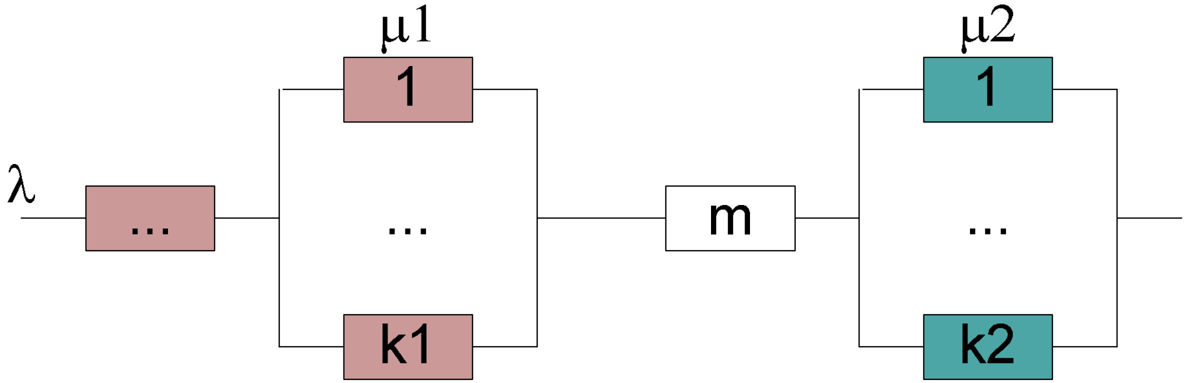
Двухфазная СМО с блокировкой



- Состояние: i – число заявок II фазы, включая заявки, заблокированные в I фазе
- Состояния:

  0 – II фаза пуста

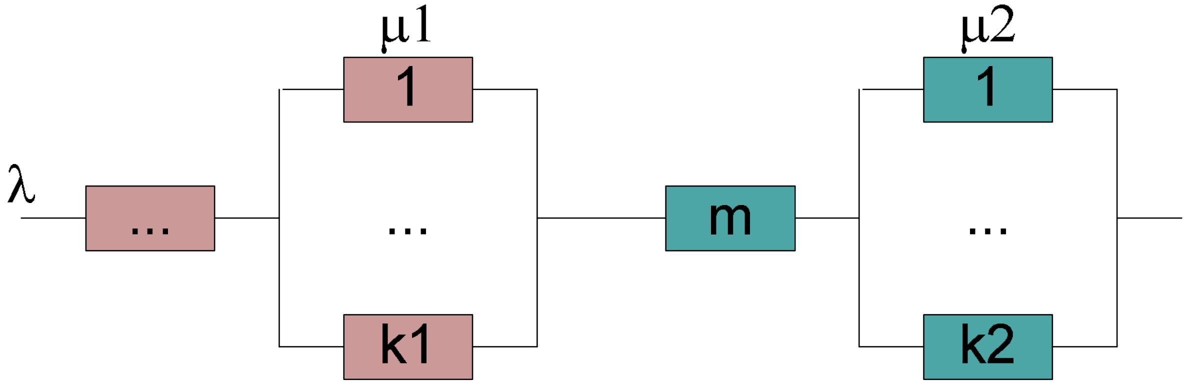
Двухфазная СМО с блокировкой



- Состояние: i – число заявок II фазы, включая заявки, заблокированные в I фазе
- Состояния:

  k2 – заполнены каналы II фазы

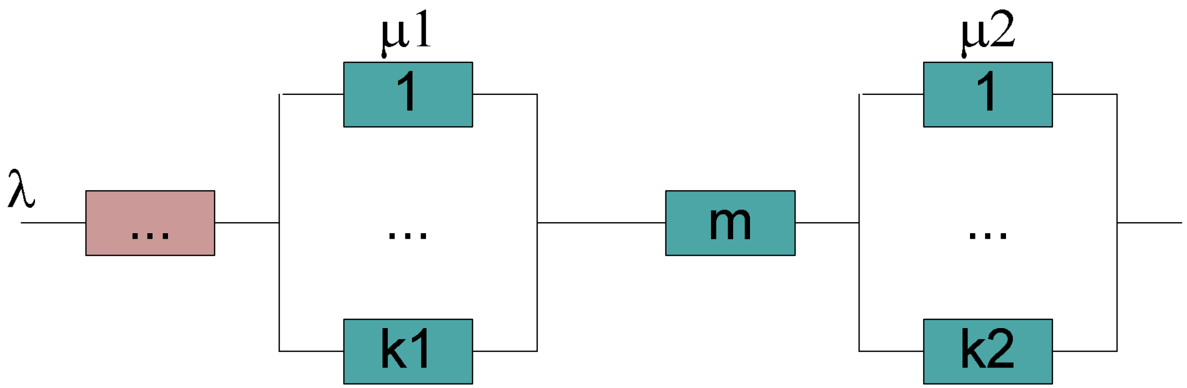
Двухфазная СМО с блокировкой



- Состояние: i – число заявок II фазы, включая заявки, заблокированные в I фазе
- Состояния:

  k2+m – заполнены каналы и очередь II фазы

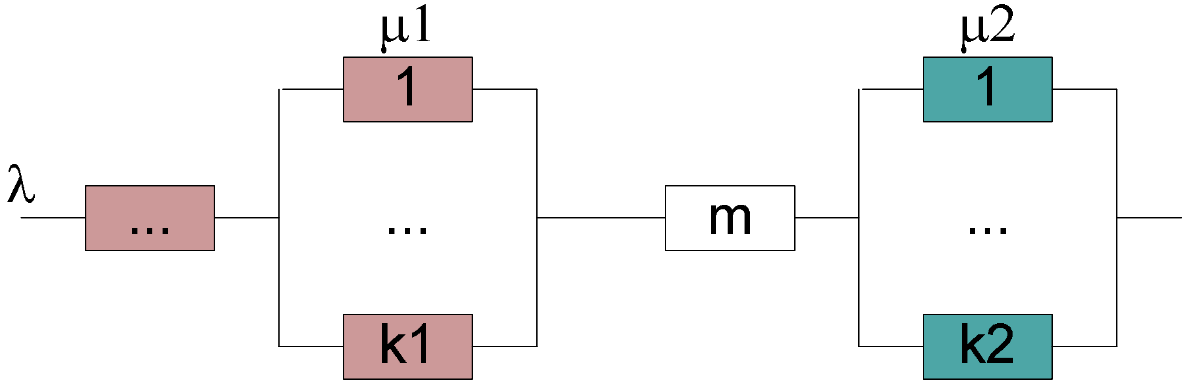
Двухфазная СМО с блокировкой

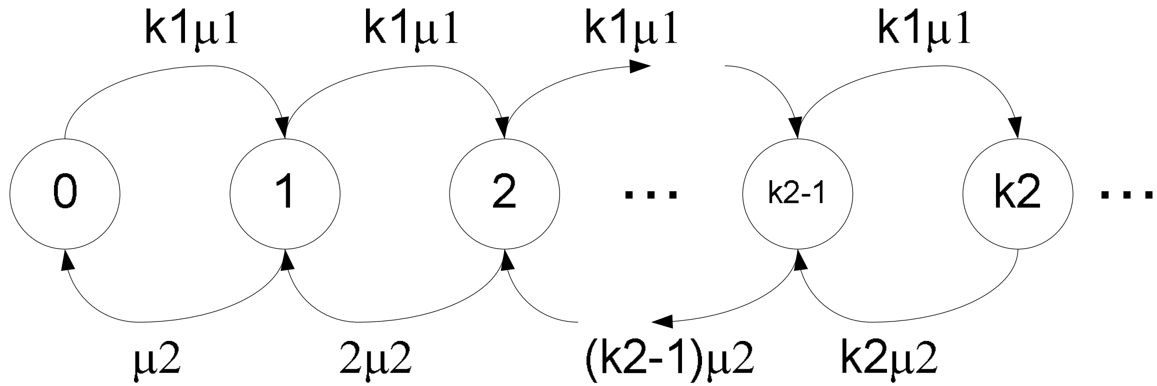


- Состояние: i – число заявок II фазы, включая заявки, заблокированные в I фазе
- Состояния:

k2+m+k1 – заполнены каналы и очередь II фазы, блокированы все каналы I фазы

Двухфазная СМО с блокировкой



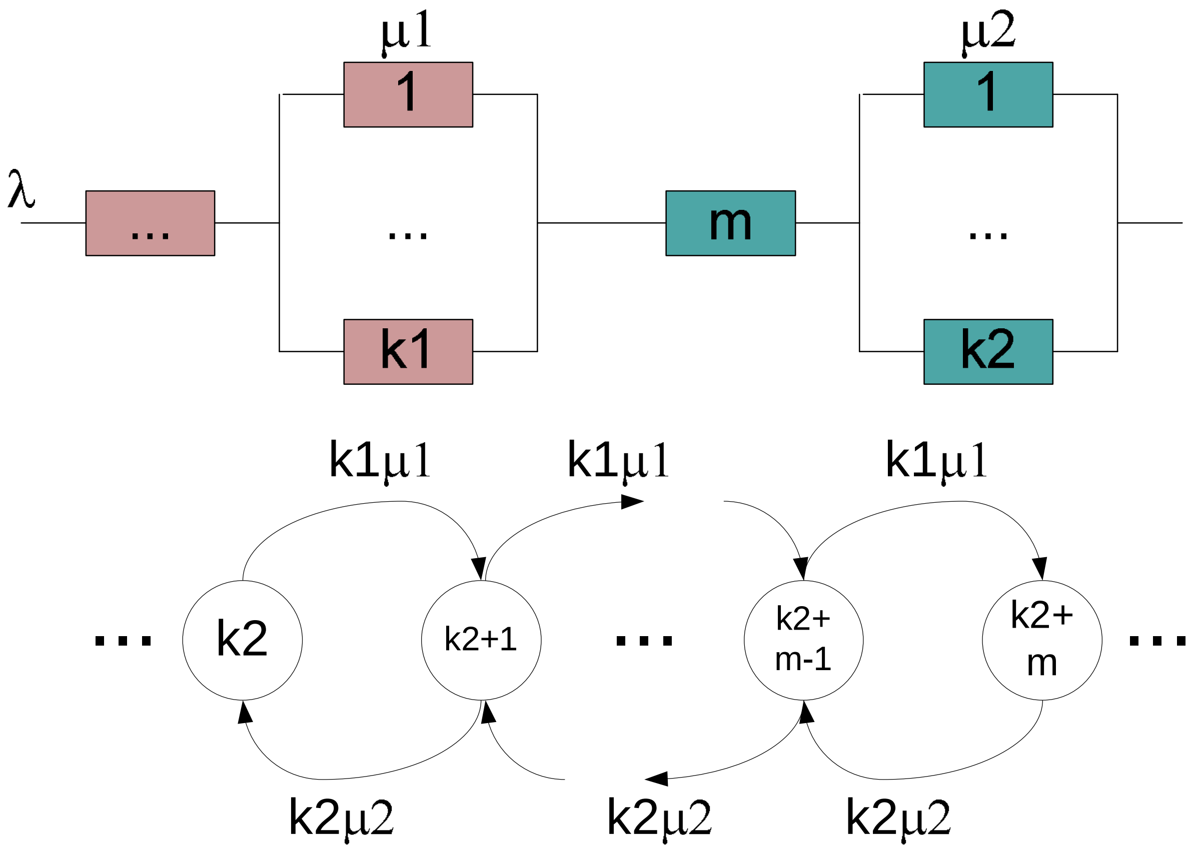


Состояния:

0 – II фаза пуста

k2 – заполнены каналы II фазы

Двухфазная СМО с блокировкой

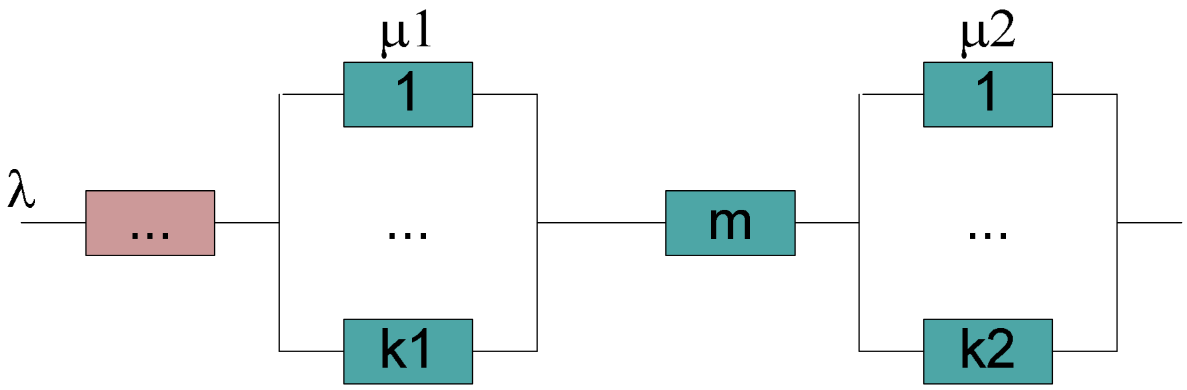


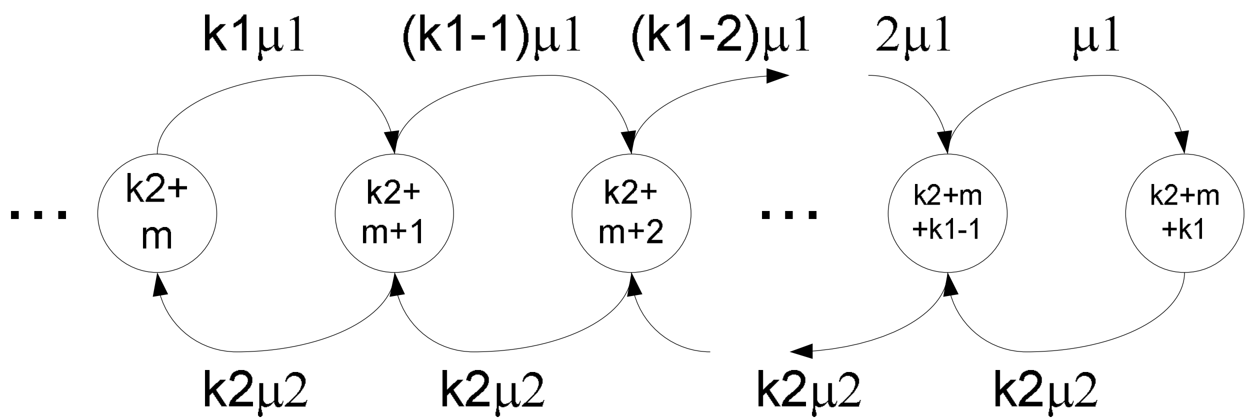
Состояния:

k2 – заполнены каналы II фазы

k2+m – заполнены каналы и очередь II фазы

Двухфазная СМО с блокировкой



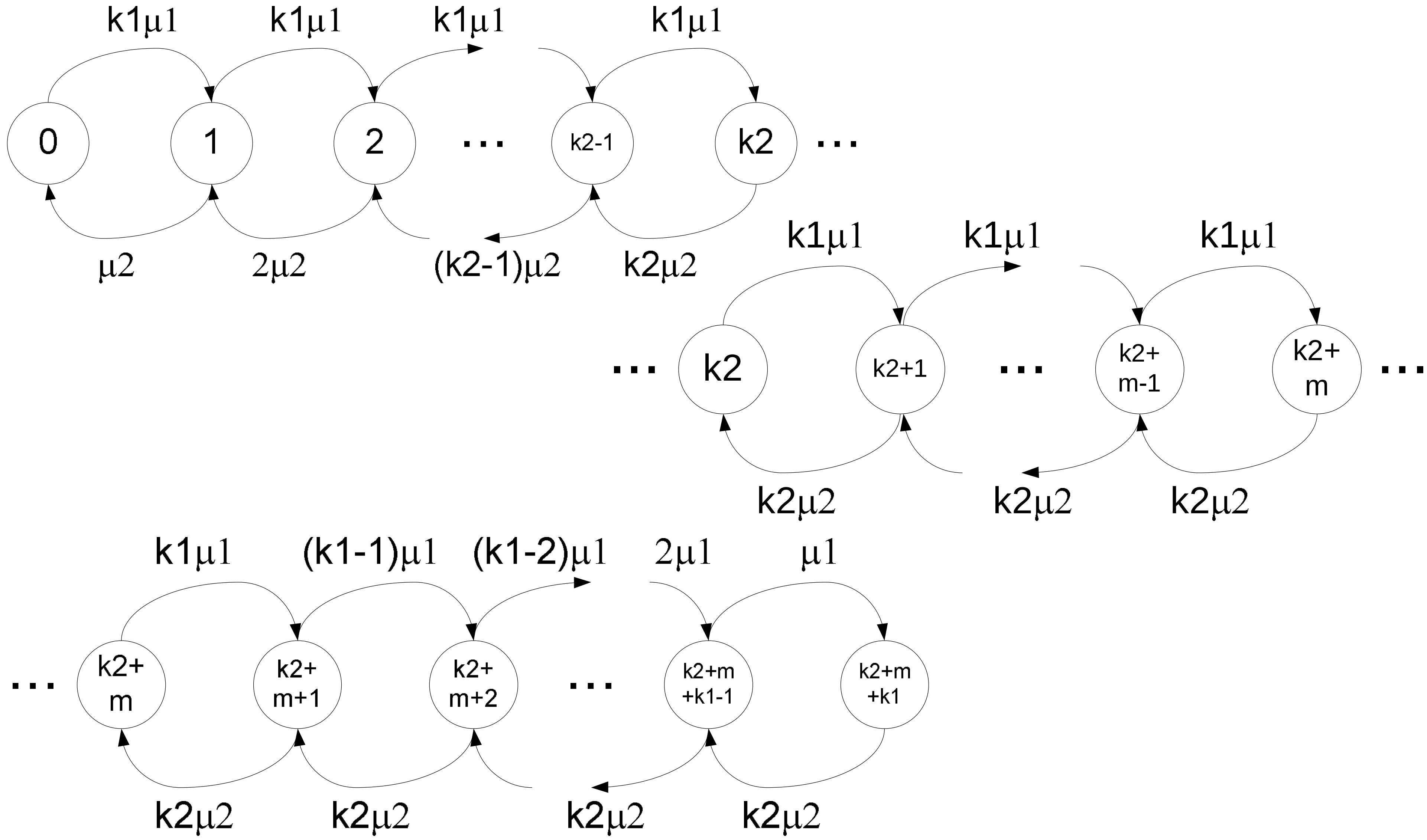


Состояния:

k2+m – заполнены каналы и очередь II фазы

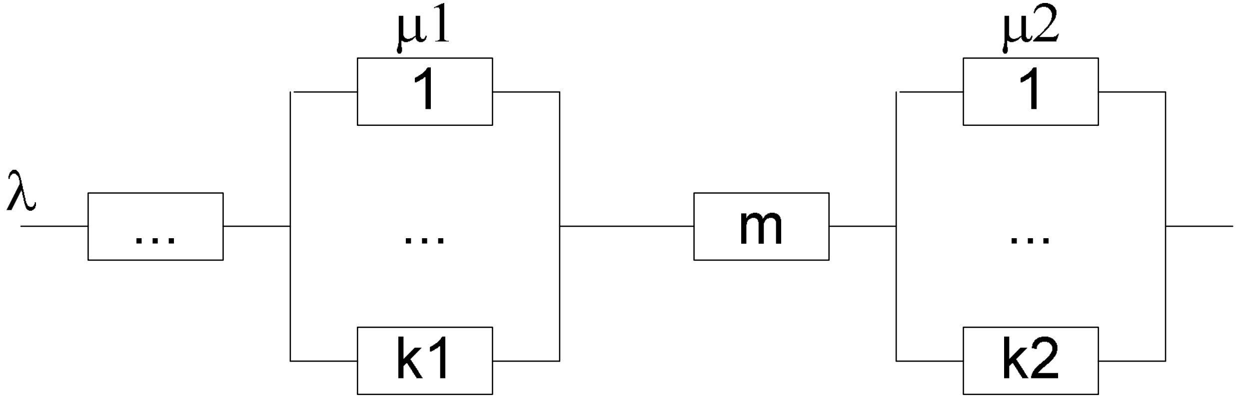
k2+m+k1 – блокированы все каналы I фазы

Двухфазная СМО с блокировкой



Двухфазная СМО с блокировкой

Предельная пропускная способность

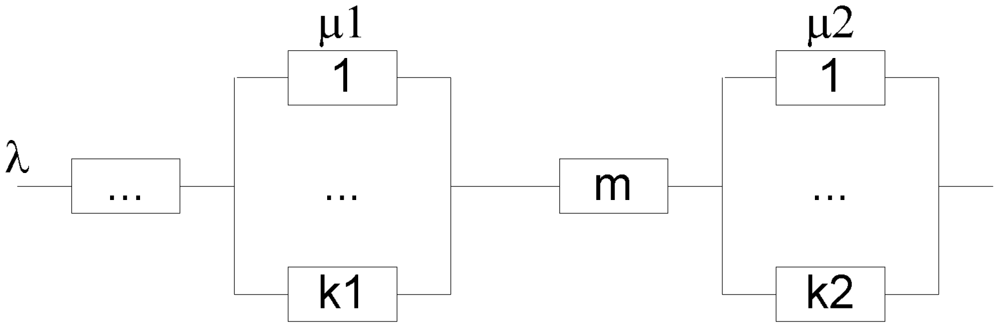


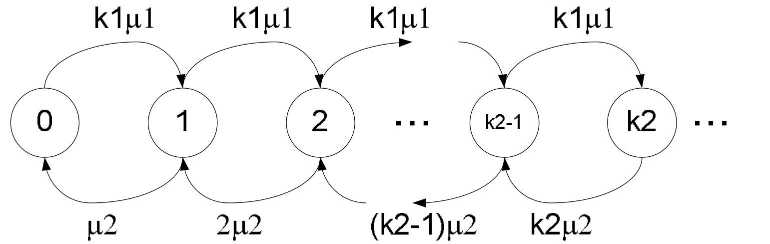
$$l_{пред} = \overline{K}_{з}^{I} m_1$$

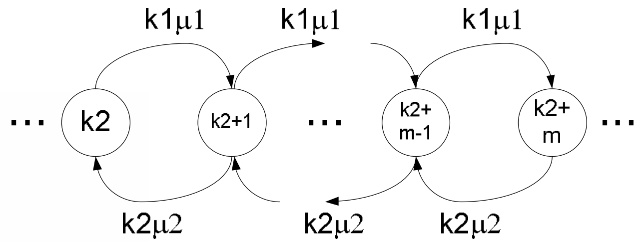
$$l_{пред} = \overline{K}_{з}^{II} m_2$$

Двухфазная СМО с блокировкой

Предельная пропускная способность





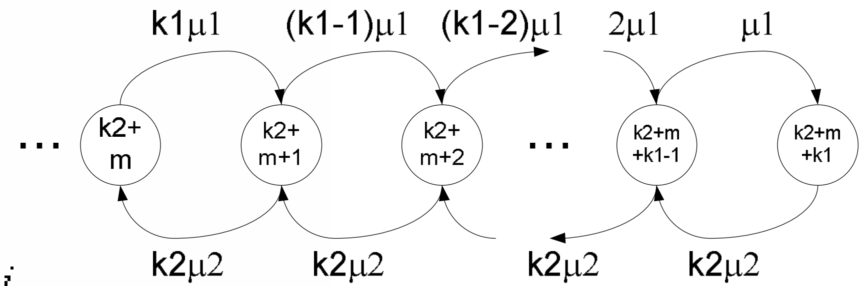


$$\overline{K_{з}}^{I} = k1\left(P_0 + \ldots + P_{k2+m}\right) +$$

$$+\left(k1-1\right)P_{k2+m+1} + \left(k1-2\right)P_{k2+m+2} + \ldots +$$

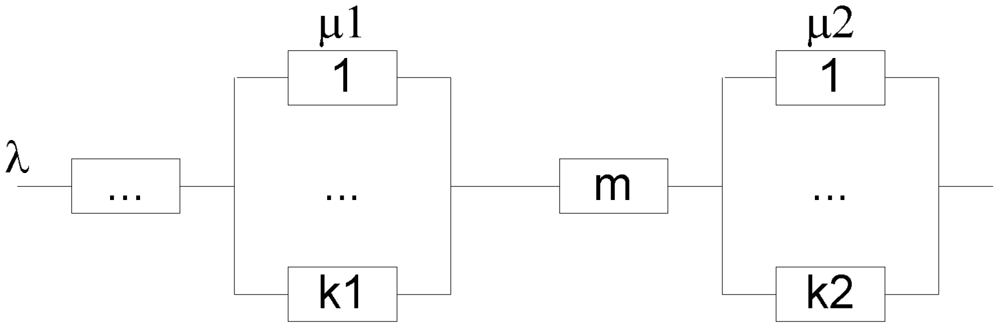
$$+2P_{k2+m+k1-2} + P_{k2+m+k1-1} =$$

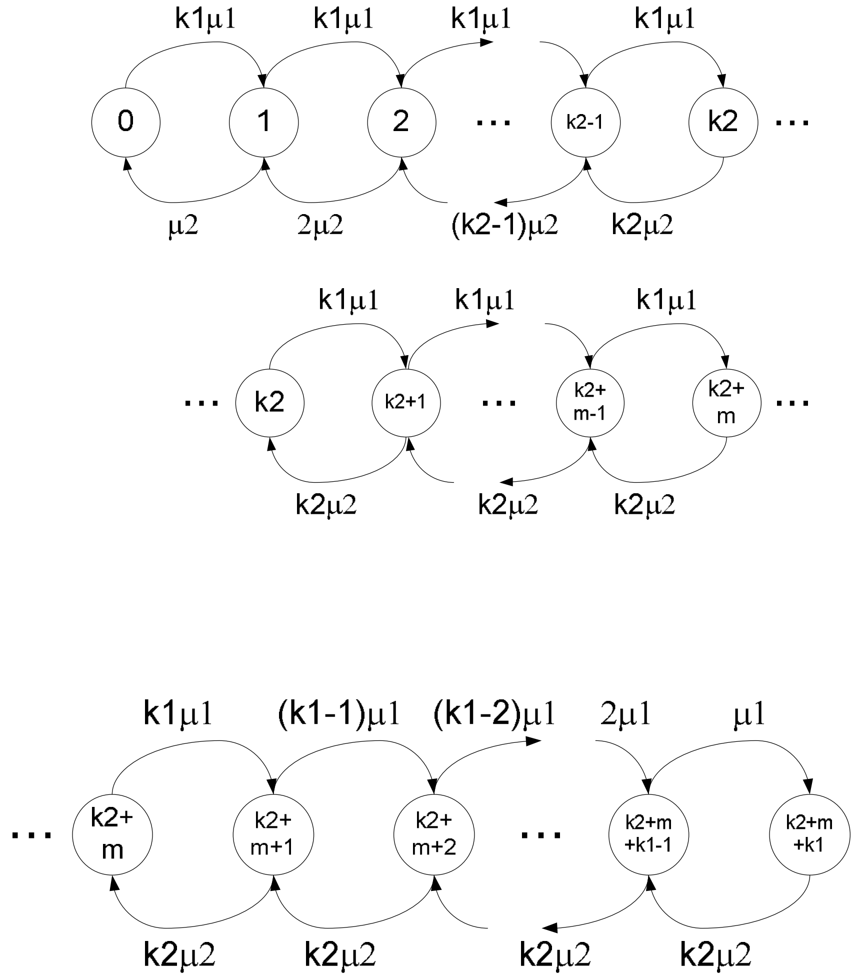
$$= k1\sum_{0}^{k2+m} P_j + \sum_{1}^{k1-1}\left(k1-j\right)P_{k2+m+j}$$



Двухфазная СМО с блокировкой

Предельная пропускная способность





$$\overline{K_з}^{II} = P_1 + 2P_2 + \ldots + k2P_{k2} + $$

$$+k2\left(P_{k2+1} + \ldots + P_{k2+m+k1}\right) =$$

$$= \sum_{1}^{k2} jP_j + k2\sum_{1}^{k1+m} P_{k2+j}$$