

# Сети массового обслуживания

# Сети МО

Сеть массового обслуживания – сеть, узлами которой являются системы массового обслуживания

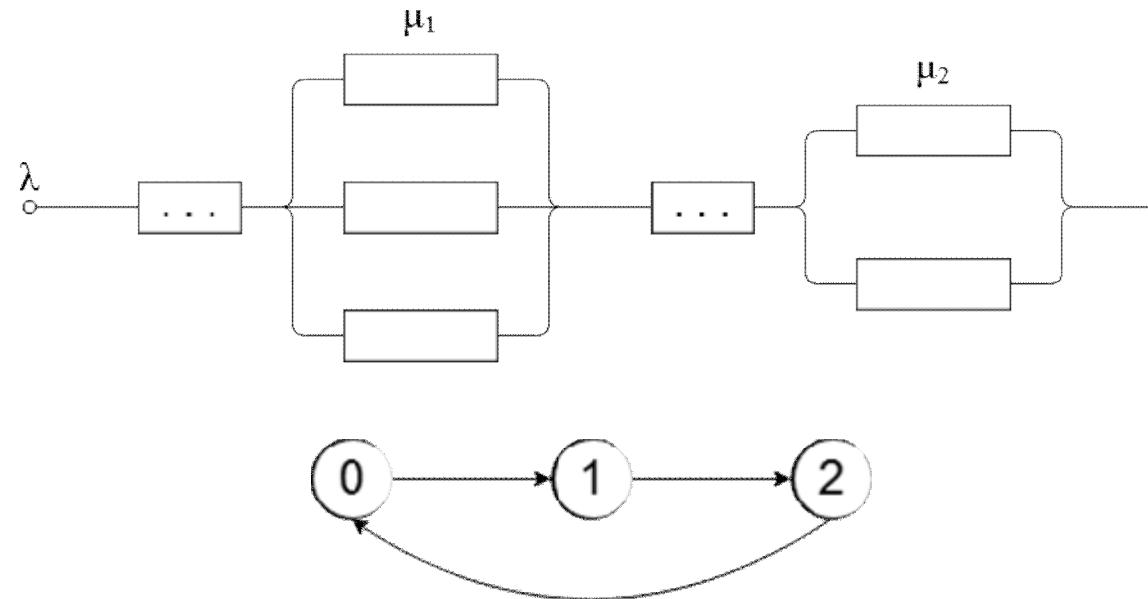
Сети массового обслуживания:

- Разомкнутые сети
  - заявки поступают из внешней среды, уходят во внешнюю среду
- Замкнутые сети
  - в сети циркулирует заданное количество заявок

# Примеры моделей

Объект: магазин альтернативного типа

- многофазную СМО можно представить как сеть, каждый узел которой – СМО



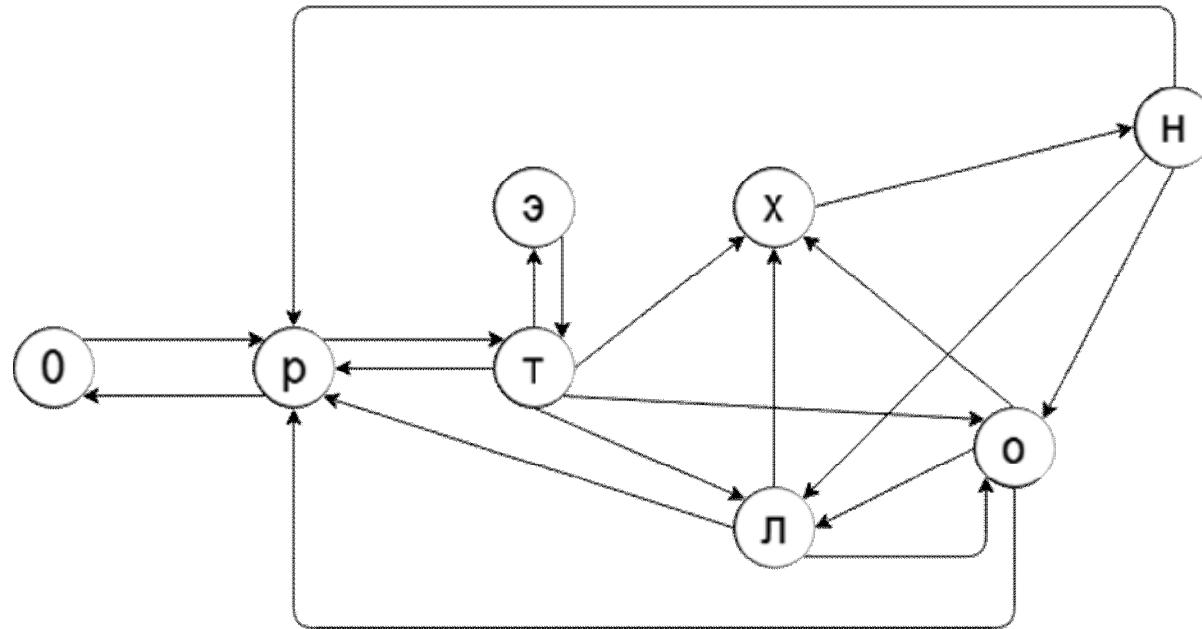
узел 0 – внешняя среда

узел 1 – фаза оплаты – система M / M / 3

узел 2 – фаза выдачи товара – система M / M / 2

# Примеры моделей

Объект: медкомиссия



узел 0 – внешняя среда

узел «р» – регистрация

узел «Т» – терапевт

узел «Э» – ЭКГ

узел «Х» – хирург

узел «Н» - невропатолог

узел «Л» – лор

узел «О» – офтальмолог

# Разомкнутые сети МО

# Задание разомкнутой сети:

$I_0$  – интенсивность внешнего источника заявок

$P = \{P_{ij}\}$  – матрица передач

$\mu = \{\mu_1 \dots \mu_M\}$  – интенсивности обслуживания узлов сети

$m = \{m_1 \dots m_M\}$  – число каналов узлов сети

## Все узлы типа М / М / К:

i-й узел – M / M / m<sub>i</sub>,

интенсивность поступления  $I_i$

## интенсивность обслуживания $m_i$

# Разомкнутые сети МО

Установившийся режим:

$$I_j = \sum_0^M I_i p_{ij}, j = \overline{0, M}$$

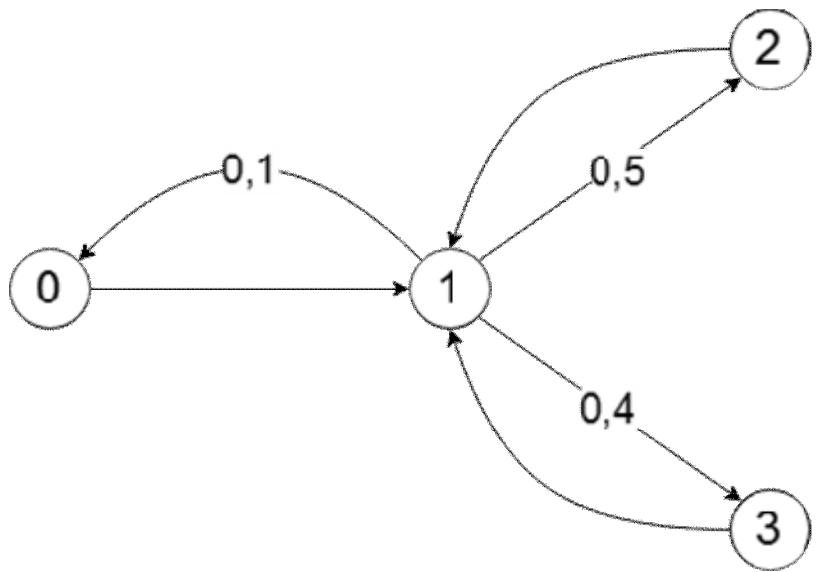
Условие устойчивости

(условие стабильности)

(условие существования установившегося режима):

$$I_0 < \min_j \left( \frac{m_j m_j}{a_j} \right) \quad a_j = \frac{I_j}{I_0}, j = \overline{1, M}$$

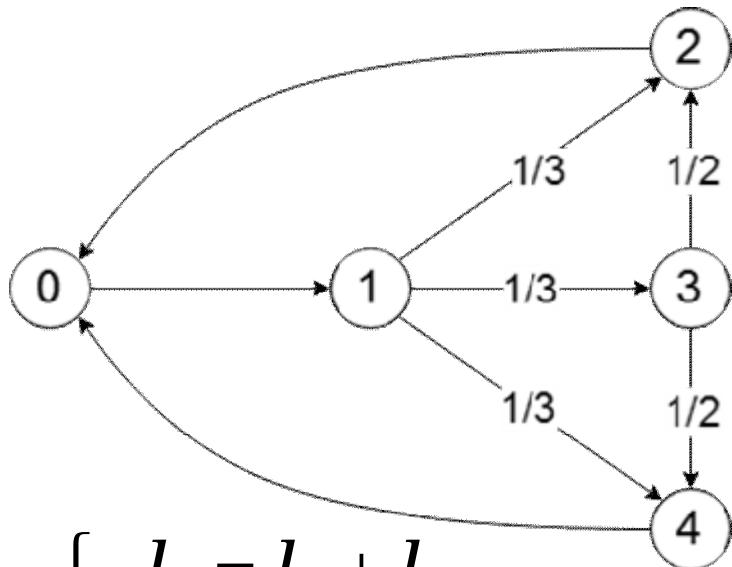
# Пример разомкнутой сети



$$p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0 & 0,5 & 0,4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} I_0 = 0,1I_1 \\ I_1 = I_0 + I_2 + I_3 \\ I_2 = 0,5I_1 \\ I_3 = 0,4I_1 \end{cases} \quad \begin{aligned} I_1 &= 10I_0, a_1 = 10 \\ I_2 &= 5I_0, a_2 = 5 \\ I_3 &= 4I_0, a_3 = 4 \end{aligned}$$

# Пример разомкнутой сети



$$p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I_0 = I_2 + I_4 \\ I_1 = I_0 \\ I_2 = \frac{1}{3}I_1 + \frac{1}{2}I_3 \\ I_3 = \frac{1}{3}I_1 \\ I_4 = \frac{1}{3}I_1 + \frac{1}{2}I_3 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} I_1 = I_0, a_1 = 1 \\ I_2 = \frac{1}{2}I_0, a_2 = \frac{1}{2} \\ I_3 = \frac{1}{3}I_0, a_3 = \frac{1}{3} \\ I_4 = \frac{1}{2}I_0, a_4 = \frac{1}{2} \end{array}$$

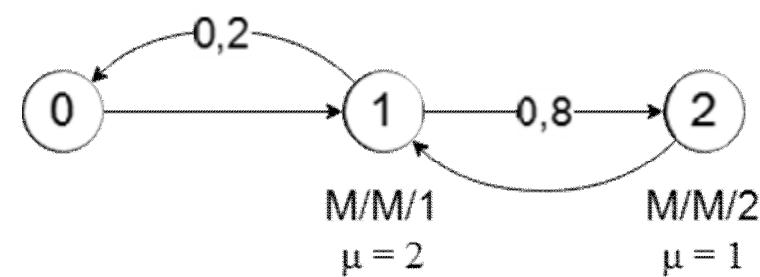
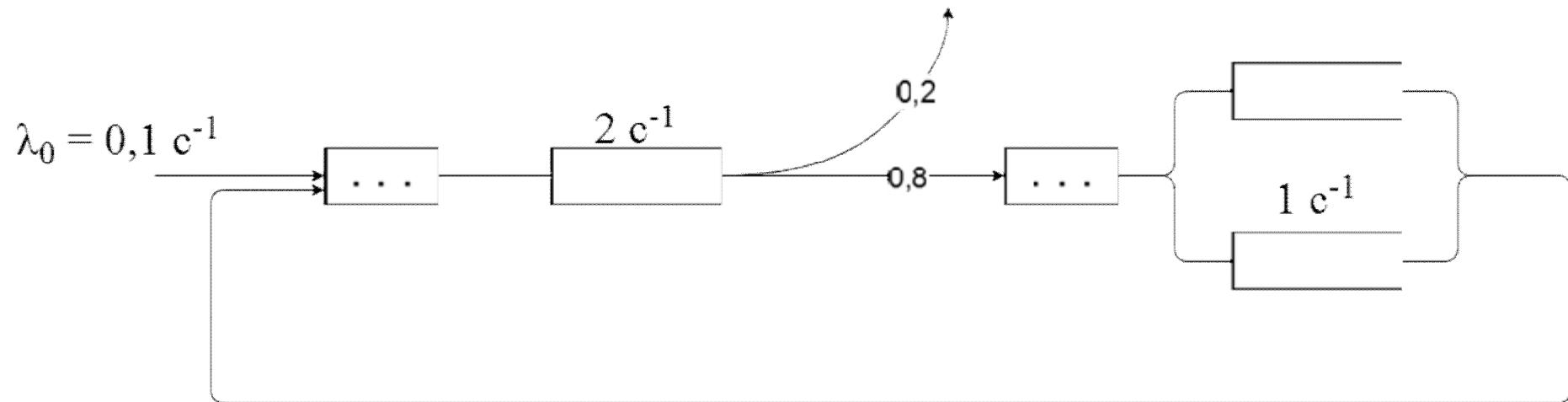
# Методика расчёта разомкнутой сети

- 1) Расчёт интенсивностей потоков в узлах сети
- 2) Проверка наличия установившегося режима
- 3) «Разрезание сети» – расчёт каждого узла
- 4) «Сборка сети» – расчёт интегральных показателей сети:

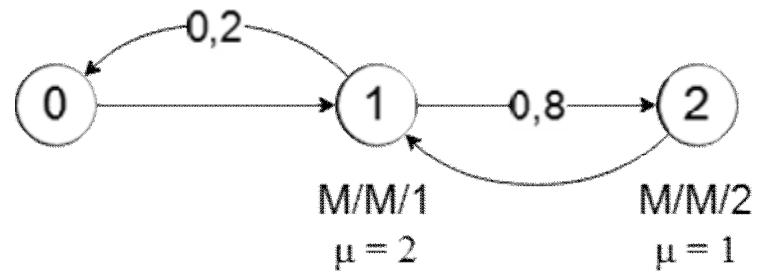
$$\bar{n} = \sum_{j=1}^M \bar{n}_j \quad \bar{n}_o = \sum_{j=1}^M \bar{n}_{o_j}$$

$$\bar{t} = \sum_{j=1}^M a_j \bar{t}_j \quad \bar{t}_o = \sum_{j=1}^M a_j \bar{t}_{o_j}$$

# Пример расчёта разомкнутой сети



# Пример расчёта разомкнутой сети



$$\begin{cases} I_0 = 0,2I_1 & I_1 = 5I_0 = 0,5c^{-1}, a_1 = 5 \\ I_1 = I_0 + I_2 & I_2 = 0,8 \cdot 5I_0 = 4I_0 = 0,4c^{-1}, a_2 = 4 \\ I_2 = 0,8I_1 & \end{cases}$$

# Пример расчёта разомкнутой сети

Проверка устойчивости:

$$I_0 = 0,1$$

$$I_1 = 0,5 \quad m_1 = 2$$

$$a_1 = 5 \quad m_1 = 1$$

$$I_2 = 0,4 \quad m_2 = 1$$

$$a_2 = 4 \quad m_2 = 2$$

$$I_0 ? \min_j \left( \frac{m_j m_j}{a_j} \right)$$

$$0,1 ? \min \left( \frac{1 \cdot 2}{5}, \frac{2 \cdot 1}{4} \right) = \frac{2}{5}$$

$$0,1 < \frac{2}{5}$$

$$0,1 = I_0 < \min_j \left( \frac{m_j m_j}{a_j} \right) = \min \left( \frac{1 \cdot 2}{5}, \frac{2 \cdot 1}{4} \right) = \frac{2}{5}$$

=> есть установившийся режим

# Пример расчёта разомкнутой сети

## «Разрезание сети»

Узел 1: М / М / 1

$$I_1 = 0,5$$

$$m_1 = 2$$

$$r_1 = \frac{I_1}{m_1} = \frac{0,5}{2} = 0,25$$

$$\overline{n}_1 = \frac{r_1}{1 - r_1} = \frac{0,25}{1 - 0,25} = \frac{1}{3}$$

$$\overline{t}_1 = \frac{\overline{n}_1}{I_1} = \frac{1/3}{0,5} = \frac{2}{3} c$$

Узел 2: М / М / 2

$$I_2 = 0,4$$

$$m_2 = 1$$

$$r_2 = \frac{I_2}{m_2} = \frac{0,4}{1} = 0,4$$

$$\overline{n}_2 = \frac{4r_2}{4 - r_2^2} = \frac{4 \cdot 0,4}{4 - 0,4^2} = \frac{5}{12}$$

$$\overline{t}_2 = \frac{\overline{n}_2}{I_2} = \frac{5/12}{0,4} = \frac{25}{24} c$$

# Пример расчёта разомкнутой сети

## «Сборка сети»

$$\overline{n_1} = \frac{1}{3} \quad \overline{n_2} = \frac{5}{12}$$

$$\overline{n} = \overline{n_1} + \overline{n_2} = \frac{1}{3} + \frac{5}{12} = \frac{3}{4}$$

$$\overline{t_1} = \frac{2}{3}c \quad \overline{t_2} = \frac{25}{24}c$$

$$a_1 = 5 \quad a_2 = 4$$

$$\overline{t} = a_1 \overline{t_1} + a_2 \overline{t_2} = 5 \cdot \frac{2}{3}c + 4 \cdot \frac{25}{24}c = 7,5c$$

# Замкнутые сети МО

Задание замкнутой сети:

$N$  – число заявок в сети

$M$  – число узлов сети

$p = \{p_{ij}\}$  – матрица передач

$\mu = \{\mu_1 \dots \mu_M\}$  – интенсивности обслуживания  
узлов сети

$m = \{m_1 \dots m_M\}$  – число каналов узлов сети

Все узлы типа М / М / К:

i-й узел – М / М /  $m_i$ ,

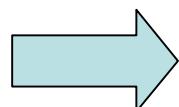
интенсивность поступления  $I_i$

интенсивность обслуживания  $m_i$

# Замкнутые сети МО

$$I_j = \sum_{i=1}^M I_i p_{ij}, j = \overline{1, M}$$

# Замкнутые сети МО

$$I_j = \sum_{i=1}^M I_i p_{ij}, j = \overline{1, M}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_j = \sum_{i=1}^M a_i p_{ij}, j = \overline{1, M} \\ a_1 = 1 \end{array} \right.$$
$$I_j = a_j I_1, \quad a_j = \frac{I_j}{I_1}, j = \overline{1, M}$$

# Замкнутые сети МО

$$I_j = \sum_{i=1}^M I_i p_{ij}, j = \overline{1, M} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} a_j = \sum_{i=1}^M a_i p_{ij}, j = \overline{1, M} \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

$$I_j = a_j I_1, \quad a_j = \frac{I_j}{I_1}, j = \overline{1, M} \quad \text{бесконечное множество решений}$$

$$w_j = \frac{a_j}{\sum_{i=1}^M a_i}, j = \overline{1, M} \quad \begin{cases} w_j = \sum_{i=1}^M w_i p_{ij}, j = \overline{1, M} \\ \sum_{j=1}^M w_j = 1 \end{cases}$$

# Замкнутые сети МО

$N$  – число заявок в сети

$M$  – число узлов сети

$S(N, M)$  – множество всех состояний сети

$|S(N, M)| = C_{N+M-1}^{M-1}$  – количество всех состояний сети

# Замкнутые сети МО. Пример

$$M = 4, N = 5$$

$$|S(N, M)| = C_{N+M-1}^{M-1}$$

$$|S(5, 4)| = C_{5+4-1}^{4-1} = C_8^3 = \frac{8!}{5!3!} = 56$$

$$S(5, 4) = \{5000, 4100, 4010, 4001, 3200, \dots, 0014, 0005\}$$

# Замкнутые сети МО. Пример

$$S(5,4) = \{5000, 4100, 4010, 4001, \\ 3200, 3110, 3101, 3020, 3011, 3002, \\ 2300, 2210, 2201, 2120, 2111, 2102, \\ 2030, 2021, 2012, 2003, \\ 1400, 1310, 1301, 1220, 1211, 1202, 1130, 1121, 1112, 1103, \\ 1040, 1031, 1022, 1013, 1004, \\ 0500, 0410, 0401, 0320, 0311, 0302, \\ 0230, 0221, 0212, 0203, 0140, 0131, 0122, 0113, 0104, \\ 0050, 0041, 0032, 0023, 0014, 0005\}$$

# Замкнутые сети МО

$$P(n_1, \dots, n_M) = \frac{\prod_{i=1}^M z_i(n_i)}{\sum_{n \in S(N, M)} \prod_{i=1}^M z_i(n_i)}$$

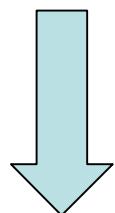
$$z_i(n_i) = \frac{W_i^{n_i}}{\prod_{k=1}^{n_i} m_i(k)}$$

$$m_i(k) = \begin{cases} k m_i, & k < m_i \\ m_i m_i, & k \geq m_i \end{cases}$$

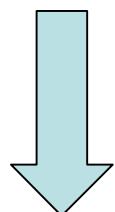
# Замкнутые сети МО

Пример расчёта состояния

Состояние 2102



$$z_1(2) \cdot z_2(1) \cdot z_4(2)$$

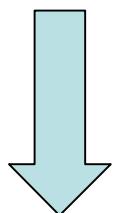


$$\frac{w_1^2}{m_1(1) \cdot m_1(2)} \cdot \frac{w_2^1}{m_2(1)} \cdot \frac{w_4^2}{m_4(1) \cdot m_4(2)}$$

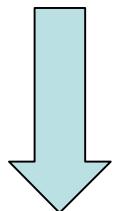
# Замкнутые сети МО

Пример расчёта состояния

Состояние 0320

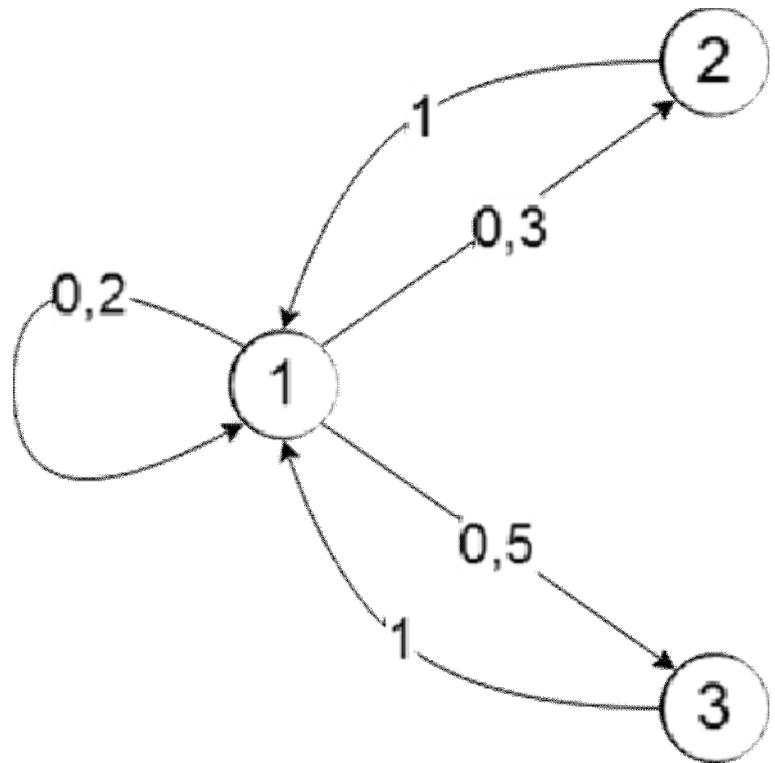


$$z_2(3) \cdot z_3(2)$$



$$\frac{w_2^3}{m_2(1) \cdot m_2(2) \cdot m_2(3)} \cdot \frac{w_3^2}{m_3(1) \cdot m_3(2)}$$

# Замкнутые сети МО. Пример



$N=3$

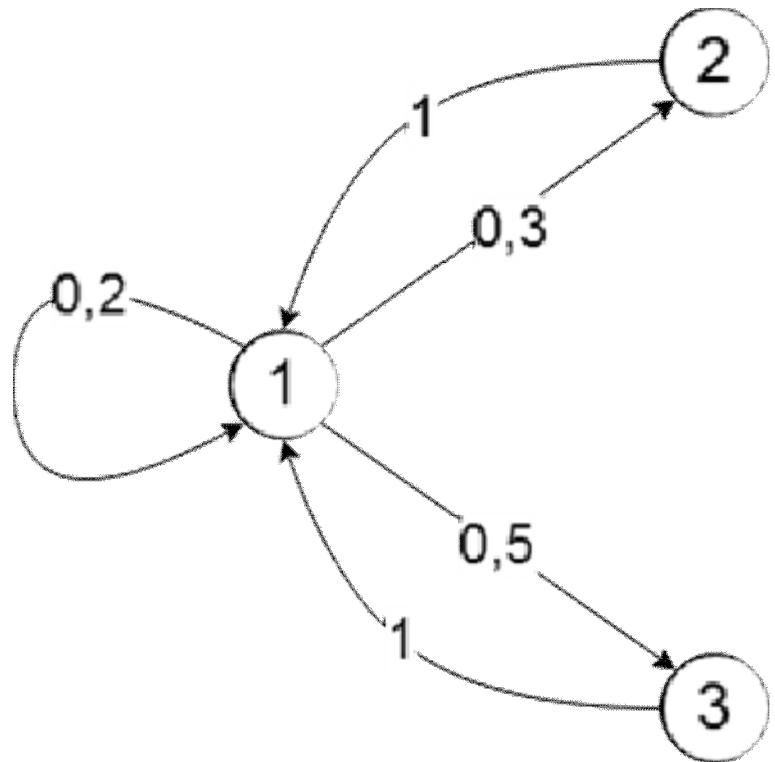
$M=3$

Узлы  $M / M / 1$

Найти коэффициент  
загрузки канала 1 узла

$h_1$

# Замкнутые сети МО. Пример



$$p = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

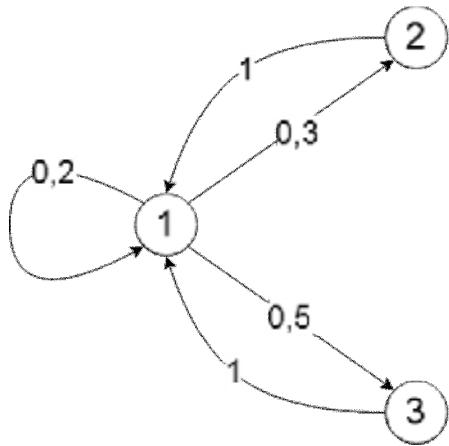
$$\begin{cases} w_1 = 0,2w_1 + w_2 + w_3 \\ w_2 = 0,3w_1 \\ w_3 = 0,5w_1 \\ w_1 + w_2 + w_3 = 1 \end{cases}$$

$$w_1 = \frac{5}{9}$$

$$w_2 = \frac{3}{18}$$

$$w_3 = \frac{5}{18}$$

# Замкнутые сети МО. Пример



Все узлы М / М / 1

$$m_1(1) = m_1(2) = m_1(3) = m_1$$

$$m_2(1) = m_2(2) = m_2(3) = m_2$$

$$m_3(1) = m_3(2) = m_3(3) = m_3$$

$$S(3,3) = \{300, 210, 201, 102, 120, 111, 030, 021, 012, 003\}$$

# Замкнутые сети МО. Пример

$$S(3,3) = \{300, 210, 201, 102, 120, 111, 030, 021, 012, 003\}$$

$$300 : \frac{W_1^3}{m_1^3} \qquad 102 : \frac{W_1 W_3^2}{m_1 m_3^2}$$

$$210 : \frac{W_1^2 W_2}{m_1^2 m_2} \qquad 030 : \frac{W_2^3}{m_2^3}$$

$$201 : \frac{W_1^2 W_3}{m_1^2 m_3} \qquad 021 : \frac{W_2^2 W_3}{m_2^2 m_3}$$

$$120 : \frac{W_1 W_2^2}{m_1 m_2^2} \qquad 012 : \frac{W_1 W_3^2}{m_1 m_3^2}$$

$$111 : \frac{W_1 W_2 W_3}{m_1 m_2 m_3} \qquad 003 : \frac{W_3^3}{m_3^3}$$

# Замкнутые сети МО. Пример

$$S(3,3) = \{300, 210, 201, 102, 120, 111, 030, 021, 012, 003\}$$

$$300 : \frac{W_1^3}{m_1^3}$$

$$102 : \frac{W_1 W_3^2}{m_1 m_3^2}$$

$$210 : \frac{W_1^2 W_2}{m_1^2 m_2}$$

$$030 : \frac{W_2^3}{m_2^3}$$

$$201 : \frac{W_1^2 W_3}{m_1^2 m_3}$$

$$021 : \frac{W_2^2 W_3}{m_2^2 m_3}$$

$$120 : \frac{W_1 W_2^2}{m_1 m_2^2}$$

$$012 : \frac{W_1 W_3^2}{m_1 m_3^2}$$

$$111 : \frac{W_1 W_2 W_3}{m_1 m_2 m_3}$$

$$003 : \frac{W_3^3}{m_3^3}$$

Сумма всех произведений

$$\begin{aligned} & \frac{W_1^3}{m_1^3} + \frac{W_1^2 W_2}{m_1^2 m_2} + \frac{W_1^2 W_3}{m_1^2 m_3} + \frac{W_1 W_2^2}{m_1 m_2^2} + \\ & + \frac{W_1 W_2 W_3}{m_1 m_2 m_3} + \frac{W_1 W_3^2}{m_1 m_3^2} + \frac{W_2^3}{m_2^3} + \\ & + \frac{W_2^2 W_3}{m_2^2 m_3} + \frac{W_1 W_3^2}{m_1 m_3^2} + \frac{W_3^3}{m_3^3} \end{aligned}$$

# Замкнутые сети МО. Пример

$$P_{300} = \frac{\frac{W_1^3}{m_1^3}}{\frac{W_1^3}{m_1^3} + \frac{W_1^2 W_2}{m_1^2 m_2} + \frac{W_1^2 W_3}{m_1^2 m_3} + \frac{W_1 W_2^2}{m_1 m_2^2} + \frac{W_1 W_2 W_3}{m_1 m_2 m_3} + \frac{W_1 W_3^2}{m_1 m_3^2} + \frac{W_2^3}{m_2^3} + \frac{W_2^2 W_3}{m_2^2 m_3} + \frac{W_1 W_3^2}{m_1 m_3^2} + \frac{W_3^3}{m_3^3}}$$

$$P_{210} = \frac{\frac{W_1^2 W_2}{m_1^2 m_2}}{\frac{W_1^3}{m_1^3} + \frac{W_1^2 W_2}{m_1^2 m_2} + \frac{W_1^2 W_3}{m_1^2 m_3} + \frac{W_1 W_2^2}{m_1 m_2^2} + \frac{W_1 W_2 W_3}{m_1 m_2 m_3} + \frac{W_1 W_3^2}{m_1 m_3^2} + \frac{W_2^3}{m_2^3} + \frac{W_2^2 W_3}{m_2^2 m_3} + \frac{W_1 W_3^2}{m_1 m_3^2} + \frac{W_3^3}{m_3^3}}$$

$$P_{201} = \frac{\frac{W_1^2 W_3}{m_1^2 m_3}}{\frac{W_1^3}{m_1^3} + \frac{W_1^2 W_2}{m_1^2 m_2} + \frac{W_1^2 W_3}{m_1^2 m_3} + \frac{W_1 W_2^2}{m_1 m_2^2} + \frac{W_1 W_2 W_3}{m_1 m_2 m_3} + \frac{W_1 W_3^2}{m_1 m_3^2} + \frac{W_2^3}{m_2^3} + \frac{W_2^2 W_3}{m_2^2 m_3} + \frac{W_1 W_3^2}{m_1 m_3^2} + \frac{W_3^3}{m_3^3}}$$

$$P_{120} = \frac{\frac{W_1 W_2^2}{m_1 m_2^2}}{\frac{W_1^3}{m_1^3} + \frac{W_1^2 W_2}{m_1^2 m_2} + \frac{W_1^2 W_3}{m_1^2 m_3} + \frac{W_1 W_2^2}{m_1 m_2^2} + \frac{W_1 W_2 W_3}{m_1 m_2 m_3} + \frac{W_1 W_3^2}{m_1 m_3^2} + \frac{W_2^3}{m_2^3} + \frac{W_2^2 W_3}{m_2^2 m_3} + \frac{W_1 W_3^2}{m_1 m_3^2} + \frac{W_3^3}{m_3^3}}$$

$$P_{111} = \frac{\frac{W_1 W_2 W_3}{m_1 m_2 m_3}}{\frac{W_1^3}{m_1^3} + \frac{W_1^2 W_2}{m_1^2 m_2} + \frac{W_1^2 W_3}{m_1^2 m_3} + \frac{W_1 W_2^2}{m_1 m_2^2} + \frac{W_1 W_2 W_3}{m_1 m_2 m_3} + \frac{W_1 W_3^2}{m_1 m_3^2} + \frac{W_2^3}{m_2^3} + \frac{W_2^2 W_3}{m_2^2 m_3} + \frac{W_1 W_3^2}{m_1 m_3^2} + \frac{W_3^3}{m_3^3}}$$

# Замкнутые сети МО. Пример

$$P_{102} = \frac{\frac{W_1 W_3^2}{m_1 m_3^2}}{\frac{W_1^3}{m_1^3} + \frac{W_1^2 W_2}{m_1^2 m_2} + \frac{W_1^2 W_3}{m_1^2 m_3} + \frac{W_1 W_2^2}{m_1 m_2^2} + \frac{W_1 W_2 W_3}{m_1 m_2 m_3} + \frac{W_1 W_3^2}{m_1 m_3^2} + \frac{W_2^3}{m_2^3} + \frac{W_2^2 W_3}{m_2^2 m_3} + \frac{W_1 W_3^2}{m_1 m_3^2} + \frac{W_3^3}{m_3^3}}$$

$$P_{030} = \frac{\frac{W_2^3}{m_2^3}}{\frac{W_1^3}{m_1^3} + \frac{W_1^2 W_2}{m_1^2 m_2} + \frac{W_1^2 W_3}{m_1^2 m_3} + \frac{W_1 W_2^2}{m_1 m_2^2} + \frac{W_1 W_2 W_3}{m_1 m_2 m_3} + \frac{W_1 W_3^2}{m_1 m_3^2} + \frac{W_2^3}{m_2^3} + \frac{W_2^2 W_3}{m_2^2 m_3} + \frac{W_1 W_3^2}{m_1 m_3^2} + \frac{W_3^3}{m_3^3}}$$

$$P_{021} = \frac{\frac{W_2^2 W_3}{m_2^2 m_3}}{\frac{W_1^3}{m_1^3} + \frac{W_1^2 W_2}{m_1^2 m_2} + \frac{W_1^2 W_3}{m_1^2 m_3} + \frac{W_1 W_2^2}{m_1 m_2^2} + \frac{W_1 W_2 W_3}{m_1 m_2 m_3} + \frac{W_1 W_3^2}{m_1 m_3^2} + \frac{W_2^3}{m_2^3} + \frac{W_2^2 W_3}{m_2^2 m_3} + \frac{W_1 W_3^2}{m_1 m_3^2} + \frac{W_3^3}{m_3^3}}$$

$$P_{012} = \frac{\frac{W_1 W_3^2}{m_1 m_3^2}}{\frac{W_1^3}{m_1^3} + \frac{W_1^2 W_2}{m_1^2 m_2} + \frac{W_1^2 W_3}{m_1^2 m_3} + \frac{W_1 W_2^2}{m_1 m_2^2} + \frac{W_1 W_2 W_3}{m_1 m_2 m_3} + \frac{W_1 W_3^2}{m_1 m_3^2} + \frac{W_2^3}{m_2^3} + \frac{W_2^2 W_3}{m_2^2 m_3} + \frac{W_1 W_3^2}{m_1 m_3^2} + \frac{W_3^3}{m_3^3}}$$

$$P_{003} = \frac{\frac{W_3^3}{m_3^3}}{\frac{W_1^3}{m_1^3} + \frac{W_1^2 W_2}{m_1^2 m_2} + \frac{W_1^2 W_3}{m_1^2 m_3} + \frac{W_1 W_2^2}{m_1 m_2^2} + \frac{W_1 W_2 W_3}{m_1 m_2 m_3} + \frac{W_1 W_3^2}{m_1 m_3^2} + \frac{W_2^3}{m_2^3} + \frac{W_2^2 W_3}{m_2^2 m_3} + \frac{W_1 W_3^2}{m_1 m_3^2} + \frac{W_3^3}{m_3^3}}$$

# Замкнутые сети МО. Пример

$$S(3,3) = \{300, 210, 201, 102, 120, 111, 030, 021, 012, 003\}$$

Найти коэффициент загрузки канала 1 узла  $h_1$

Канал 1 узла загружен: 300, 210, 201, 102, 120, 111

$$h_1 = P_{300} + P_{210} + P_{201} + P_{120} + P_{111} + P_{102}$$

Канал 1 узла не загружен: 030, 021, 012, 003

$$h_1 = 1 - (P_{030} + P_{021} + P_{012} + P_{003})$$

# Замкнутые сети МО. Пример

$$S(3,3) = \{300, 210, 201, 102, 120, 111, 030, 021, 012, 003\}$$

Найти коэффициент загрузки канала 1 узла  $h_1$

$$h_1 = 1 - (P_{030} + P_{021} + P_{012} + P_{003})$$

$$h_1 = 1 - \frac{\frac{w_2^3}{m_2^3} + \frac{w_2^2 w_3}{m_2^2 m_3} + \frac{w_1 w_3^2}{m_1 m_3^2} + \frac{w_3^3}{m_3^3}}{\frac{w_1^3}{m_1^3} + \frac{w_1^2 w_2}{m_1^2 m_2} + \frac{w_1^2 w_3}{m_1^2 m_3} + \frac{w_1 w_2^2}{m_1 m_2^2} + \frac{w_1 w_2 w_3}{m_1 m_2 m_3} + \frac{w_1 w_3^2}{m_1 m_3^2} + \frac{w_2^3}{m_2^3} + \frac{w_2^2 w_3}{m_2^2 m_3} + \frac{w_2 w_3^2}{m_2 m_3^2} + \frac{w_3^3}{m_3^3}}$$

# Методика расчёта замкнутой сети

1) Расчёт вероятностей посещения узлов сети  $w_j, j = 1, M$

2) Расчёт вероятностей состояний сети  $P(...)$

3) Расчёт количественных показателей для каждого

узла:  $\overline{n}_j = \sum_{n \in S(N, M)} n_j P(n_1 \dots n_j \dots n_M)$

$$\overline{n}_{oj} = \sum_{\substack{n \in S(N, M) \\ n_j > m_j}} (n_j - m_j) P(...)$$

$$\overline{n}_{обсл\,j} = \overline{n}_j - \overline{n}_{oj}$$

4) Расчёт временных показателей для каждого узла:

$$\frac{\overline{t}_j}{n_j} = \frac{\overline{t}_{oj}}{n_{oj}} = \frac{\overline{t}_{обсл\,j}}{n_{обсл\,j}}$$

$$\overline{t}_{обсл\,j} = \frac{1}{m_j}$$

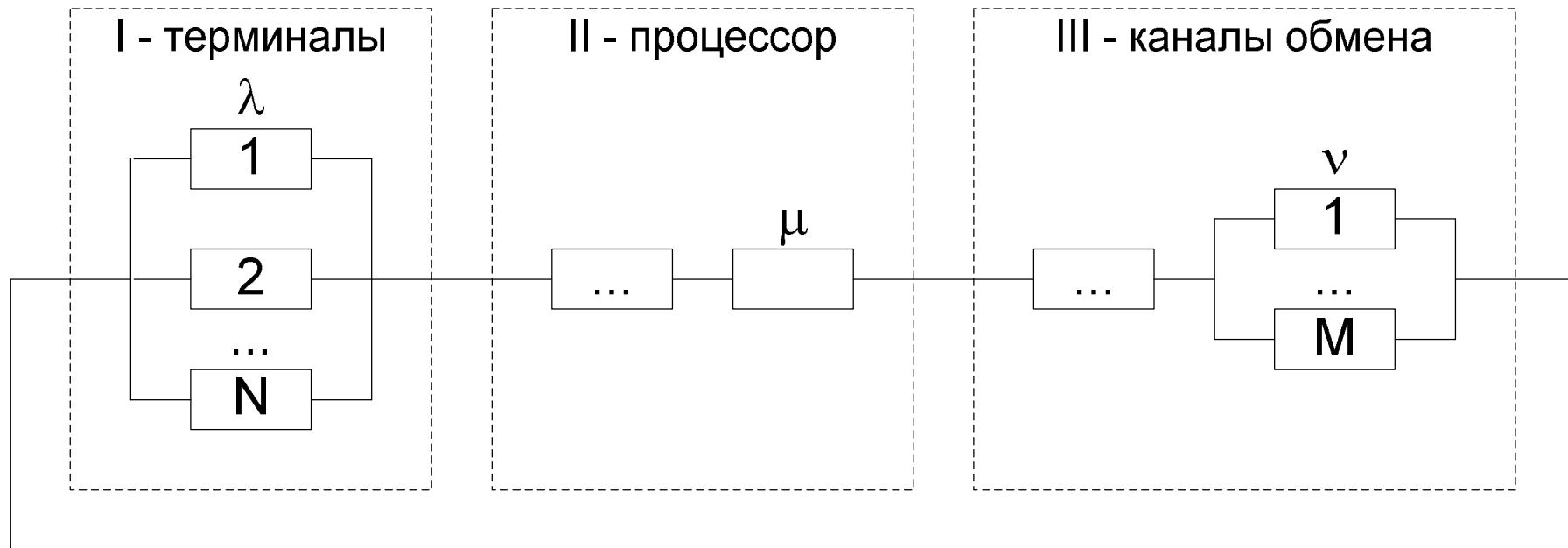
# Пример – замкнутая СМО

## Задача

Рассмотреть работу вычислительной системы: пользователи с терминалов запускают программы на выполнение, они исполняются на процессоре, через каналы обмена результат возвращается пользователям.

Требуется найти время реакции системы на действия пользователей.

# Пример – замкнутая СМО

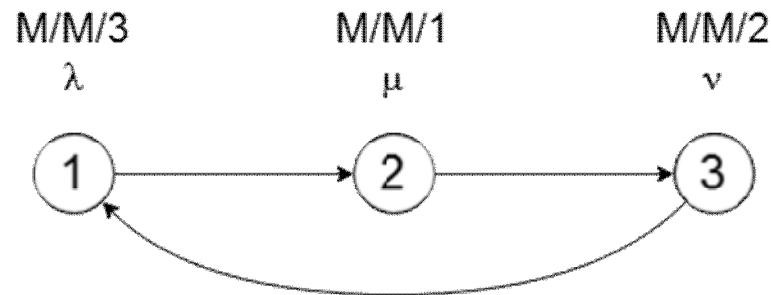


- $M = 2$
- $N = 3$
- Число заявок в системе: 3

$$\overline{t}_{peak} = \overline{t}_{II-III} = ?$$

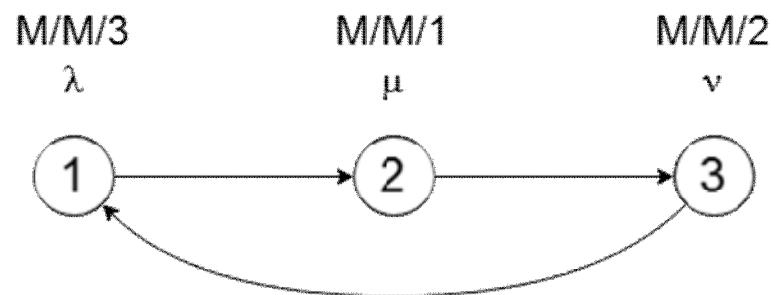
# Пример – замкнутая СМО

Интерпретация задачи: сеть МО



$$S(3,3) = \{300, 210, 201, 102, 120, 111, 030, 021, 012, 003\}$$

# Пример – замкнутая СМО



$$S(3,3) = \{300, 210, 201, 102, 120, 111, 030, 021, 012, 003\}$$

$$\overline{t_{peak}} = \frac{N - \overline{n_1}}{I \cdot n_1}$$

$$\overline{n_1} = 1 \cdot (P_{120} + P_{111} + P_{102}) + 2 \cdot (P_{210} + P_{201}) + 3 \cdot P_{300}$$

# Пример – замкнутая СМО

$$\overline{n_1} = \frac{A_{102} + A_{120} + A_{111} + 2A_{201} + 2A_{210} + 3A_{300}}{A_{300} + A_{210} + A_{201} + A_{120} + A_{111} + A_{102} + A_{030} + A_{021} + A_{012} + A_{003}}$$

$$A_{300} = \frac{W_1^3}{m_1(1)m_1(2)m_1(3)}$$

$$A_{210} = \frac{W_1^2 W_2}{m_1(1)m_1(2)m_2(1)}$$

$$A_{201} = \frac{W_1^2 W_3}{m_1(1)m_1(2)m_3(1)}$$

$$A_{120} = \frac{W_1 W_2^2}{m_1(1)m_2(1)m_2(2)}$$

$$A_{111} = \frac{W_1 W_2 W_3}{m_1(1)m_2(1)m_3(1)}$$

$$A_{102} = \frac{W_1 W_3^2}{m_1(1)m_3(1)m_3(2)}$$

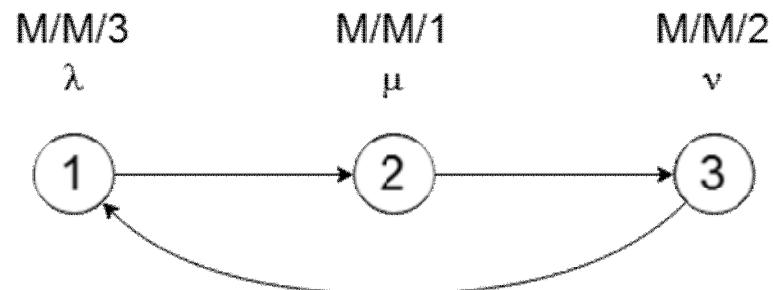
$$A_{030} = \frac{W_2^3}{m_2(1)m_2(2)m_2(3)}$$

$$A_{021} = \frac{W_2^2 W_3}{m_2(1)m_2(2)m_3(1)}$$

$$A_{012} = \frac{W_2 W_3^2}{m_2(1)m_3(1)m_3(2)}$$

$$A_{003} = \frac{W_3^3}{m_3(1)m_3(2)m_3(3)}$$

# Пример – замкнутая СМО



$$W_1 = W_2 = W_3 = \frac{1}{3}$$

$$m_1(1) = l \quad m_2(1) = m \quad m_3(1) = n$$

$$m_1(2) = 2l \quad m_2(2) = m \quad m_3(2) = 2n$$

$$m_1(3) = 3l \quad m_2(3) = m \quad m_3(3) = 2n$$

# Пример – замкнутая СМО

$$\overline{n_1} = \frac{\frac{1}{lm^2} + \frac{1}{lmn} + \frac{1}{2ln^2} + \frac{2}{2l^2m} + \frac{2}{2l^2n} + \frac{3}{6l^3}}{\frac{1}{6l^3} + \frac{1}{2l^2m} + \frac{1}{2l^2n} + \frac{1}{lm^2} + \frac{1}{lmn} + \frac{1}{2ln^2} + \frac{1}{m^3} + \frac{1}{m^2n} + \frac{1}{2mn^2} + \frac{1}{4n^3}}$$

$$\overline{t_{peak}} = \frac{N - \overline{n_1}}{I \cdot n_1}$$

$$\begin{aligned}\overline{t_{peak}} &= \frac{1}{2mn} \cdot (2n^3m^2 + 2n^2m^3 + 4lnm^3 + 8n^3ml + \\ &+ 8lm^2n^2 + 3l^2m^3 + 6l^2m^2n + 12l^2mn^2 + 12l^2n^3) / \\ &\quad (2l^2n^2 + 2l^2mn + m^2l^2 + 2m^2ln + 2lmn^2 + m^2n^2)\end{aligned}$$

# Как рассчитать замкнутую сеть массового обслуживания

Задана замкнутая сеть массового обслуживания, включающая  $M = 4$  узла. В сети циркулирует  $N$  заявок в соответствии с матрицей передач, также заданы описания узлов как систем массового обслуживания (число каналов, интенсивность обслуживания).

На примере  $N = 5$ .

# Как рассчитать замкнутую сеть массового обслуживания

1. Рассчитать вероятности посещения  
узлов сети.  $\{W_j\}$

# Как рассчитать замкнутую сеть массового обслуживания

## 2. Записать все состояния сети

5000	2300
4100	2210
4010	2201
4001	2120
3200	2111
3110	2102
3101	2030
3020	...
3011	0005
3002	

# Как рассчитать замкнутую сеть массового обслуживания

3. Для каждого состояния записать  
операнды произведений

5000	$z_1(5)$
4100	$z_1(4) \cdot z_2(1)$
4010	$z_1(4) \cdot z_3(1)$
4001	$z_1(4) \cdot z_4(1)$
3200	$z_1(3) \cdot z_2(2)$
3110	$z_1(3) \cdot z_2(1) \cdot z_3(1)$
3101	$z_1(3) \cdot z_2(1) \cdot z_4(1)$
3020	$z_1(3) \cdot z_3(2)$
3011	$z_1(3) \cdot z_3(1) \cdot z_4(1)$
3002	$z_1(3) \cdot z_4(2)$

2300	$z_1(2) \cdot z_2(3)$
2210	$z_1(2) \cdot z_2(2) \cdot z_3(1)$
2201	$z_1(2) \cdot z_2(2) \cdot z_4(1)$
2120	$z_1(2) \cdot z_2(1) \cdot z_3(2)$
2111	$z_1(2) \cdot z_2(1) \cdot z_3(1) \cdot z_4(1)$
2102	$z_1(2) \cdot z_2(1) \cdot z_4(2)$
2030	$z_1(2) \cdot z_3(3)$
...	
0005	$z_4(5)$

# Как рассчитать замкнутую сеть массового обслуживания

4. Для каждого состояния расшифровать  
операнды произведений

5000	$z_1(5)$	$\frac{w_1^5}{m_1(1) \cdot m_1(2) \cdot m_1(3) \cdot m_1(4) \cdot m_1(5)}$
4100	$z_1(4) \cdot z_2(1)$	$\frac{w_1^4}{m_1(1) \cdot m_1(2) \cdot m_1(3) \cdot m_1(4)} \cdot \frac{w_2^1}{m_2(1)}$
4010	$z_1(4) \cdot z_3(1)$	$\frac{w_1^4}{m_1(1) \cdot m_1(2) \cdot m_1(3) \cdot m_1(4)} \cdot \frac{w_3^1}{m_3(1)}$
4001	$z_1(4) \cdot z_4(1)$	$\frac{w_1^4}{m_1(1) \cdot m_1(2) \cdot m_1(3) \cdot m_1(4)} \cdot \frac{w_4^1}{m_4(1)}$

# Как рассчитать замкнутую сеть массового обслуживания

4. Для каждого состояния расшифровать  
операнды произведений

3200	$z_1(3) \cdot z_2(2)$	$\frac{w_1^3}{m_1(1) \cdot m_1(2) \cdot m_1(3)} \cdot \frac{w_2^2}{m_2(1) \cdot m_2(2)}$
3110	$z_1(3) \cdot z_2(1) \cdot z_3(1)$	$\frac{w_1^3}{m_1(1) \cdot m_1(2) \cdot m_1(3)} \cdot \frac{w_2^1}{m_2(1)} \cdot \frac{w_3^1}{m_3(1)}$
3101	$z_1(3) \cdot z_2(1) \cdot z_4(1)$	$\frac{w_1^3}{m_1(1) \cdot m_1(2) \cdot m_1(3)} \cdot \frac{w_2^1}{m_2(1)} \cdot \frac{w_4^1}{m_4(1)}$
3020	$z_1(3) \cdot z_3(2)$	$\frac{w_1^3}{m_1(1) \cdot m_1(2) \cdot m_1(3)} \cdot \frac{w_3^2}{m_3(1) \cdot m_3(2)}$
3011	$z_1(3) \cdot z_3(1) \cdot z_4(1)$	$\frac{w_1^3}{m_1(1) \cdot m_1(2) \cdot m_1(3)} \cdot \frac{w_3^1}{m_3(1)} \cdot \frac{w_4^1}{m_4(1)}$
3002	$z_1(3) \cdot z_4(2)$	$\frac{w_1^3}{m_1(1) \cdot m_1(2) \cdot m_1(3)} \cdot \frac{w_4^2}{m_4(1) \cdot m_4(2)}$

# Как рассчитать замкнутую сеть массового обслуживания

4. Для каждого состояния расшифровать  
операнды произведений

2300	$z_1(2) \cdot z_2(3)$	$\frac{w_1^2}{m_1(1) \cdot m_1(2)} \cdot \frac{w_2^3}{m_2(1) \cdot m_2(2) \cdot m_2(3)}$
2210	$z_1(2) \cdot z_2(2) \cdot z_3(1)$	$\frac{w_1^2}{m_1(1) \cdot m_1(2)} \cdot \frac{w_2^2}{m_2(1) \cdot m_2(2)} \cdot \frac{w_3^1}{m_3(1)}$
2201	$z_1(2) \cdot z_2(2) \cdot z_4(1)$	$\frac{w_1^2}{m_1(1) \cdot m_1(2)} \cdot \frac{w_2^2}{m_2(1) \cdot m_2(2)} \cdot \frac{w_4^1}{m_4(1)}$
2120	$z_1(2) \cdot z_2(1) \cdot z_3(2)$	$\frac{w_1^2}{m_1(1) \cdot m_1(2)} \cdot \frac{w_2^1}{m_2(1)} \cdot \frac{w_3^2}{m_3(1) \cdot m_3(2)}$
2111	$z_1(2) \cdot z_2(1) \cdot z_3(1) \cdot z_4(1)$	$\frac{w_1^2}{m_1(1) \cdot m_1(2)} \cdot \frac{w_2^1}{m_2(1)} \cdot \frac{w_3^1}{m_3(1)} \cdot \frac{w_4^1}{m_4(1)}$
2102	$z_1(2) \cdot z_2(1) \cdot z_4(2)$	$\frac{w_1^2}{m_1(1) \cdot m_1(2)} \cdot \frac{w_2^1}{m_2(1)} \cdot \frac{w_4^2}{m_4(1) \cdot m_4(2)}$
2030	$z_1(2) \cdot z_3(3)$	$\frac{w_1^2}{m_1(1) \cdot m_1(2)} \cdot \frac{w_3^3}{m_3(1) \cdot m_3(2) \cdot m_3(3)}$
...		
0005	$z_4(5)$	$\frac{w_4^5}{m_4(1) \cdot m_4(2) \cdot m_4(3) \cdot m_4(4) \cdot m_4(5)}$

# Как рассчитать замкнутую сеть массового обслуживания

5. Подставить значения  $w_j$  и  $m_i(k)$

$m_i(k)$  – суммарная интенсивность i узла  
для случая, когда в нём k заявок

Например, если первый узел – одноканальный, второй  
узел – двухканальный, третий узел – трёхканальный,  
четвертый узел – четырёхканальный, то

$$m_1(1) = m_1, m_1(2) = m_1, m_1(3) = m_1, m_1(4) = m_1, m_1(5) = m_1$$

$$m_2(1) = m_2, m_2(2) = 2m_2, m_2(3) = 2m_2, m_2(4) = 2m_2, m_2(5) = 2m_2$$

$$m_3(1) = m_3, m_3(2) = 2m_3, m_3(3) = 3m_3, m_3(4) = 3m_3, m_3(5) = 3m_3$$

$$m_4(1) = m_4, m_4(2) = 2m_4, m_4(3) = 3m_4, m_4(4) = 4m_4, m_4(5) = 4m_4$$

# Как рассчитать замкнутую сеть массового обслуживания

6. Найти сумму всех произведений.

Каждое произведение разделить на их сумму. Тем самым мы получим вероятности каждого состояния сети.

# Как рассчитать замкнутую сеть массового обслуживания

7. Находим среднее число заявок в  
каждом узле – как взвешенные суммы  
вероятностей, учитывая, сколько заявок  
в узле в каждом состоянии

$$\overline{n}_1 = 5P_{5000} + 4P_{4100} + 4P_{4010} + 4P_{4001} + 3P_{3200} + 3P_{3110} + 3P_{3101} + 3P_{3020} + 3P_{3011} + 3P_{3002} + 2P_{2300} + 2P_{2210} + \dots + 0P_{0005}$$

$$\overline{n}_2 = 0P_{5000} + 1P_{4100} + 0P_{4010} + 0P_{4001} + 2P_{3200} + 1P_{3110} + 1P_{3101} + 0P_{3020} + 0P_{3011} + 0P_{3002} + 3P_{2300} + 2P_{2210} + \dots + 0P_{0005}$$

$$\overline{n}_3 = 0P_{5000} + 0P_{4100} + 1P_{4010} + 0P_{4001} + 0P_{3200} + 1P_{3110} + 0P_{3101} + 2P_{3020} + 1P_{3011} + 0P_{3002} + 0P_{2300} + 1P_{2210} + \dots + 0P_{0005}$$

$$\overline{n}_4 = 0P_{5000} + 0P_{4100} + 0P_{4010} + 1P_{4001} + 0P_{3200} + 0P_{3110} + 1P_{3101} + 0P_{3020} + 1P_{3011} + 2P_{3002} + 0P_{2300} + 0P_{2210} + \dots + 5P_{0005}$$

Можно проверить себя – сумма должна быть равна N

$$\overline{n}_1 + \overline{n}_2 + \overline{n}_3 + \overline{n}_4 = 5$$

# Как рассчитать замкнутую сеть массового обслуживания

8. Аналогично находим среднее число заявок в очереди каждого узла – как взвешенные суммы вероятностей, учитывая, сколько заявок в очереди узла в каждом состоянии.

# Как рассчитать замкнутую сеть массового обслуживания

9. Находим средние времена нахождения  
заявок в каждом узле и в очереди  
каждого узла.