Немарковские системы массового обслуживания

Характеристики случайных величин

- Плотность распределения f(x)
- Математическое ожидание (первый момент): $$\overline{t} = M[t] = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, f(t)\, dt$$
- Второй момент: $$M\left[t^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\, dt$$
- Дисперсия:

$$\sigma_t^2 = M\left[t^2\right] - \left(M[t]\right)^2$$

Экспоненциальное распределение

- Обозначение: M
- Плотность распределения: $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, x\ge 0\\ 0, x<0\end{cases}$
- Математическое ожидание:

$$\overline{t}=\int_0^{+\infty} t\,f(t)\,dt=\int_0^{+\infty}\lambda t e^{-\lambda t}dt=\frac{1}{\lambda}$$

- Второй момент:

$$M\left[t^2\right]=\int_0^{+\infty} t^2 f(t)\,dt=\int_0^{+\infty}\lambda t^2 e^{-\lambda t}dt=\frac{2}{\lambda^2}$$

- Дисперсия:

$$\sigma_t^2=M\left[t^2\right]-\left(M[t]\right)^2=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}$$

Распределение Эрланга k порядка

- Обозначение: E_k
- Плотность распределения:

$$f_k(t) = \frac{k\lambda(k\lambda t)^{k-1} e^{-k\lambda t}}{(k-1)!}$$

$$\nu = k\lambda$$

$$f_k(t) = \frac{\nu(\nu t)^{k-1} e^{-\nu t}}{(k-1)!}$$

Распределение Эрланга k порядка

- Математическое ожидание:

$$\overline{t} = \int_{0}^{+\infty} t\, f(t)\, dt = \int_{0}^{+\infty} \frac{\nu t (\nu t)^{k-1} e^{-\nu t}}{(k-1)!} dt = \frac{k}{\nu} = \frac{1}{\lambda}$$

- Второй момент:

$$M\left[t^2\right] = \int_{0}^{+\infty} t^2 f(t)\, dt = \int_{0}^{+\infty} \frac{\nu t^2 (\nu t)^{k-1} e^{-\nu t}}{(k-1)!} dt = \frac{(k+1)k}{\nu^2} = \left(1 + \frac{1}{k}\right)\frac{1}{\lambda^2}$$

- Дисперсия:

$$\sigma_t^2 = M\left[t^2\right] - \left(M[t]\right)^2 = \frac{(k+1)k}{\nu^2} - \frac{k^2}{\nu^2} = \frac{k^2}{\nu^2} = \frac{1}{k\lambda^2}$$

Распределение Эрланга k порядка

- k = 1

$$f_1(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{1-1} e^{-\lambda t}}{(1-1)!} = \lambda e^{-\lambda t}$$

$$\overline{t} = \frac{1}{\lambda} \qquad \sigma_t^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

экспоненциальное распределение

- k = 2

$$f_2(t) = \frac{2\lambda(2\lambda t)^{2-1} e^{-2\lambda t}}{(2-1)!} = 4\lambda^2 t e^{-2\lambda t}$$

$$\overline{t} = \frac{1}{\lambda} \qquad \sigma_t^2 = \frac{1}{2\lambda^2}$$

Распределение Эрланга k порядка

- Физический смысл

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \xrightarrow[\text{прореживание}]{\text{регулярное}} f_k(t) = \frac{k\lambda (k\lambda t)^{k-1} e^{-k\lambda t}}{(k-1)!}$$

  – оставляем каждое k-е событие
  – остальные отбрасываем

Постоянное (детерминированное) распределение

Регулярный поток: события – каждые t_0

Время поступления (обслуживания) – не случайная величина

- Обозначение: D
- Плотность распределения: $f(t) = \delta(t - t_0)$
- Математическое ожидание: $\overline{t} = ?$
- Дисперсия: $\sigma_t^2 = ?$

Постоянное (детерминированное) распределение

Регулярный поток: события – каждые t_0

Время поступления (обслуживания) – не случайная величина

- Обозначение: D
- Плотность распределения: $f(t) = \delta(t - t_0)$
- Математическое ожидание: $\overline{t} = t_0 = \dfrac{1}{\lambda}$
- Дисперсия: $\sigma_t^2 = 0$

Равномерное распределение

- Обозначение: R
- Плотность распределения:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, x\in[a,b]\\ 0, x\notin[a,b]\end{cases}$$

- Математическое ожидание: ?

- Дисперсия: ?

домашнее задание

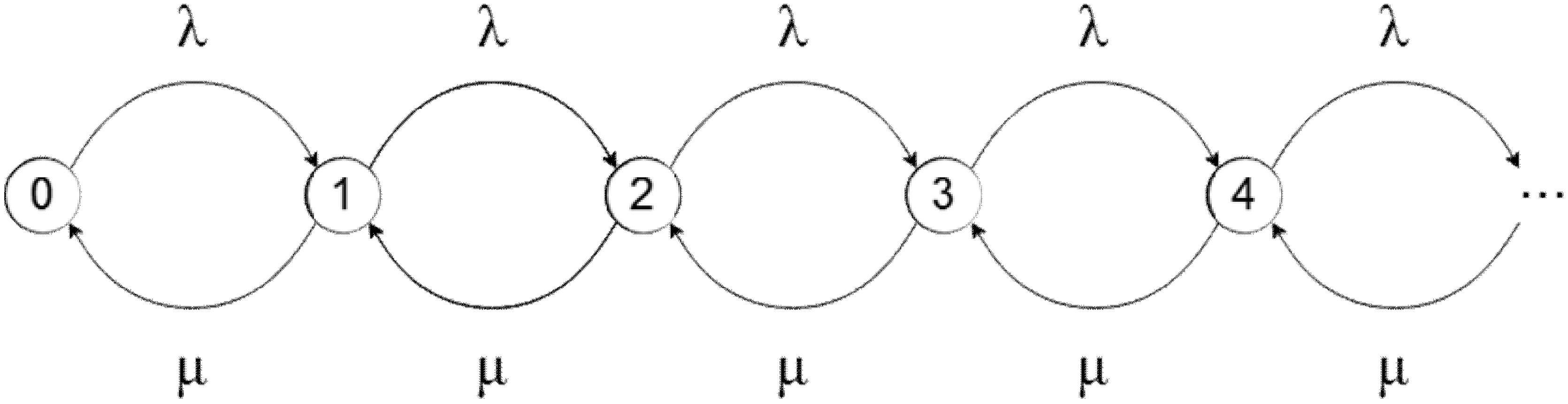
Методы решения

- Метод фаз (этапов)
- Метод вложенных марковских цепей
- Интегральный метод

СМО с распределением Эрланга

- Используем метод фаз

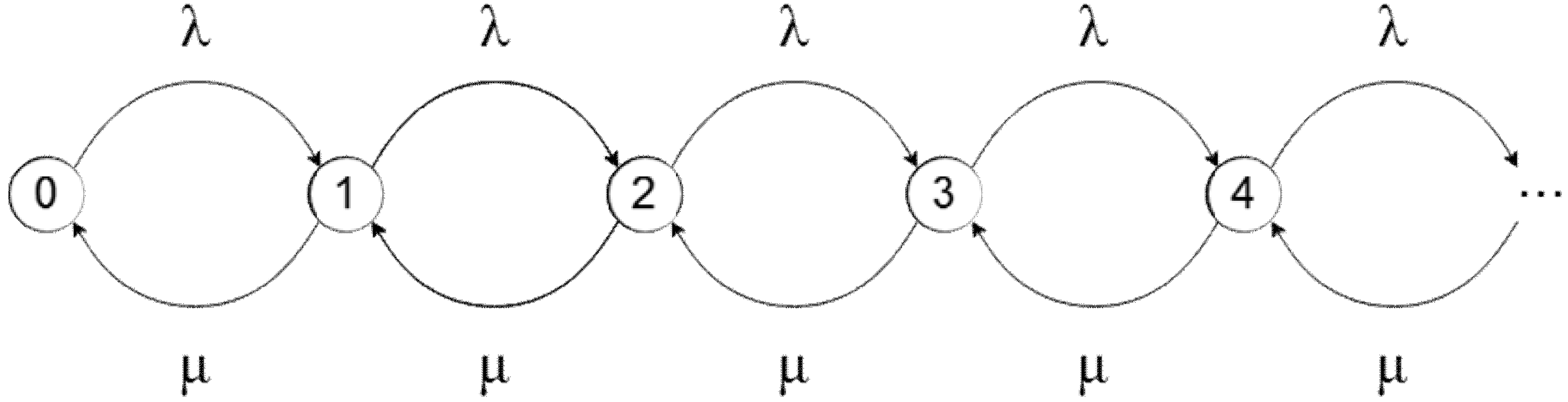
M / M / 1



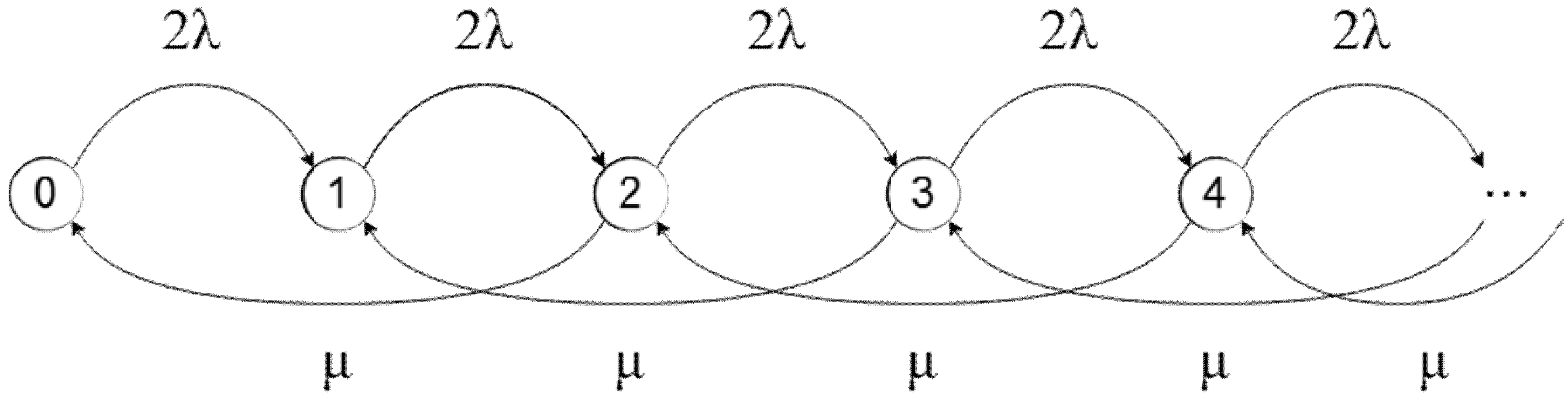
СМО с распределением Эрланга

- Используем метод фаз

M / M / 1



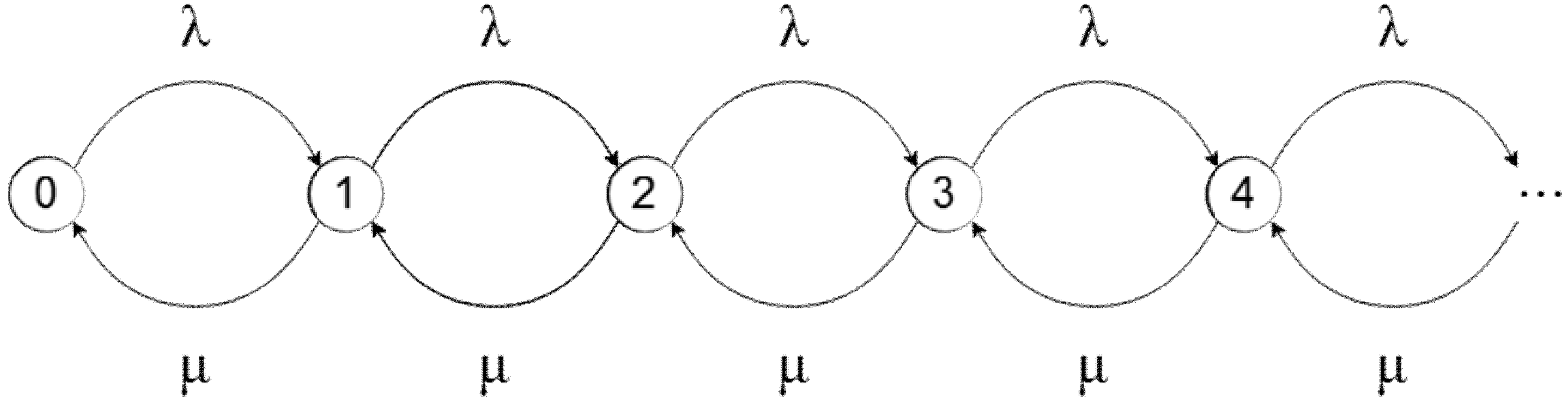
E_2 / M / 1



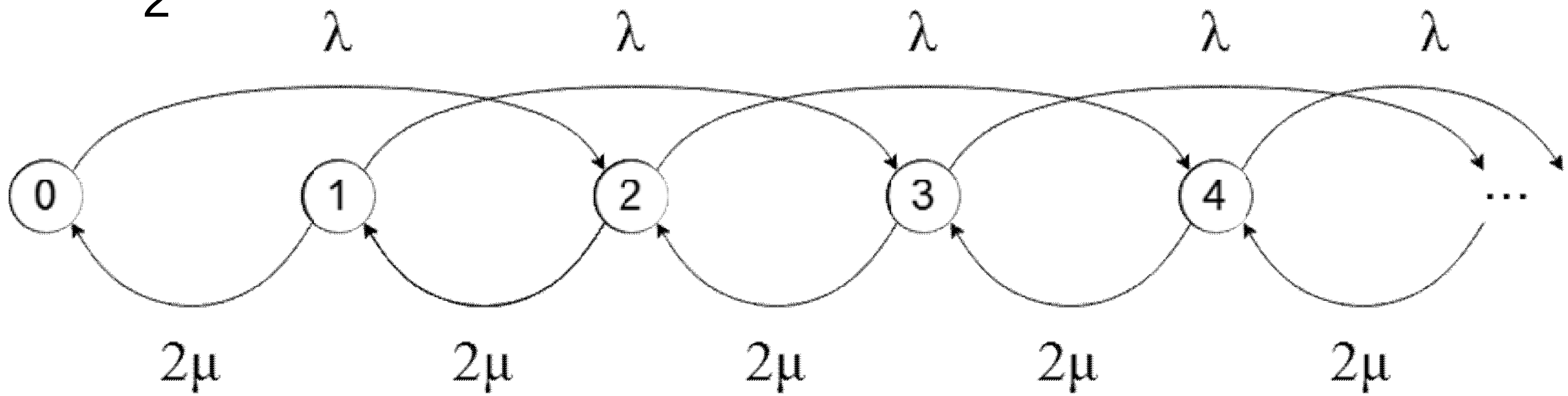
СМО с распределением Эрланга

- Используем метод фаз

M / M / 1



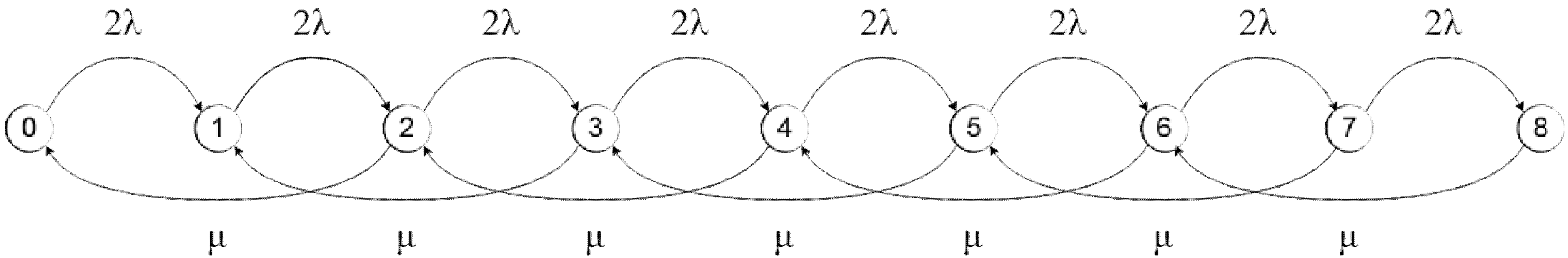
M / E_2 / 1



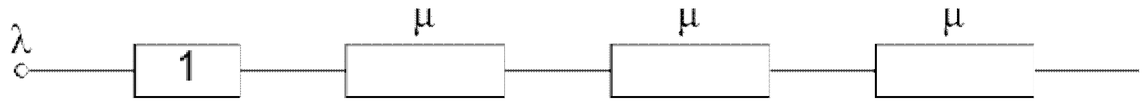
СМО с распределением Эрланга

- E_2 / M / 1 / 3

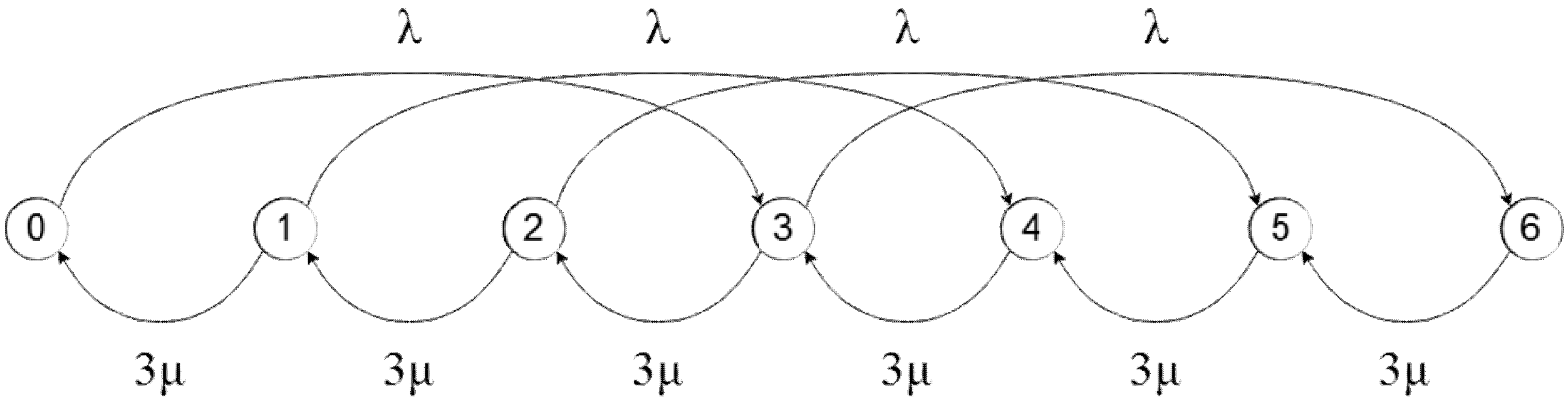
  Последнее состояние: (число каналов + число мест в очереди) * порядок распределения Эрланга = (1 + 3) * 2 = 8



СМО с распределением Эрланга

- M / E_3 / 1 / 1 

  Последнее состояние: (число каналов + число мест в очереди) * порядок распределения Эрланга = (1 + 1) * 3 = 6



СМО с любым распределением времени обслуживания

- Используем метод вложенных марковских цепей

M / G / 1:

$$\overline{j} = \rho + \rho^2 \frac{1 + \sigma_t^2 \Big/ \left(\overline{t}\right)^2}{2\left(1 - \rho\right)}$$

СМО с любым распределением времени обслуживания

- M / M / 1: $\overline{t} = \frac{1}{\mu} \qquad \sigma_t^2 = \frac{1}{\mu^2}$

$$\overline{j} = \rho + \rho^2 \frac{1 + \frac{1}{\mu^2} \Big/ \left(\frac{1}{\mu}\right)^2}{2\left(1 - \rho\right)} = \frac{\rho}{1 - \rho}$$

- M / D / 1: $\overline{t} = \frac{1}{\mu} \qquad \sigma_t^2 = 0$

$$\overline{j} = \rho + \rho^2 \frac{1 + 0 \Big/ \left(\frac{1}{\mu}\right)^2}{2\left(1 - \rho\right)} = \frac{\rho\left(2 - \rho\right)}{2\left(1 - \rho\right)}$$

СМО с любым распределением времени обслуживания

- M / E_k / 1: $\overline{t} = \frac{1}{\mu}$ $\quad \sigma_t^2 = \frac{1}{k\mu^2}$

$$\overline{j} = \rho + \rho^2 \frac{1 + \frac{1}{k\mu^2} \Big/ \left(\frac{1}{\mu}\right)^2}{2(1-\rho)} = \rho + \rho^2 \frac{1 + \frac{1}{k}}{2(1-\rho)}$$

- M / E_2 / 1: $\overline{t} = \frac{1}{\mu}$ $\quad \sigma_t^2 = \frac{1}{2\mu^2}$

$$\overline{j} = \rho + \rho^2 \frac{1 + \frac{1}{2}}{2(1-\rho)} = \frac{\rho(4-\rho)}{4(1-\rho)}$$

СМО с любым распределением времени поступления

- Используем интегральный метод

G / M / 1: $$P_j = (1-\varphi)\varphi^j$$

$$\varphi:\ \ \varphi = A^*(\mu - \mu\varphi)$$

$$0 < \varphi < 1$$

$$\overline{j} = \frac{\varphi}{1-\varphi}$$

$$A^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

A* – преобразование Лапласа для f(t) – плотности распределения длительности интервалов поступления заявок

СМО с любым распределением времени поступления

M / M / 1:

$$A^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} \lambda t e^{-\lambda t} dt = \frac{\lambda}{\lambda + s}$$

$$\varphi = A^*(\mu - \mu\varphi) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu - \mu\varphi}$$

$$\varphi_1 = 1$$

$$\varphi_2 = \rho$$

$$0 < \varphi < 1 \Rightarrow \varphi = \rho$$

$$\overline{j} = \frac{\varphi}{1-\varphi} = \frac{\rho}{1-\rho}$$

СМО с любым распределением времени поступления

E_2 / M / 1: $$f\left(t\right)=4\lambda^2 te^{-2\lambda t}$$

$$A^*\left(s\right)=\int\limits_0^\infty e^{-st}4\lambda^2 te^{-2\lambda t}dt=\frac{4\lambda^2}{\left(2\lambda+s\right)^2}$$

$$\varphi=A^*\left(\mu-\mu\varphi\right)=\frac{4\lambda^2}{\left(2\lambda+\mu-\mu\varphi\right)^2}$$

СМО с любым распределением времени поступления

E_2 / M / 1: $$\varphi = A^*(\mu - \mu\varphi) = \frac{4\lambda^2}{(2\lambda + \mu - \mu\varphi)^2}$$

$$\varphi_1 = 1$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2} + 2\rho + \sqrt{\frac{1}{4} + 2\rho}$$

$$\varphi_3 = \frac{1}{2} + 2\rho - \sqrt{\frac{1}{4} + 2\rho}$$

$$0 < \varphi < 1 \Rightarrow \varphi = \frac{1}{2} + 2\rho - \sqrt{\frac{1}{4} + 2\rho}$$

СМО с любым распределением времени поступления

E_2 / M / 1:

$$\varphi = \frac{1}{2} + 2\rho - \sqrt{\frac{1}{4} + 2\rho}$$

$$\overline{j} = \frac{\varphi}{1-\varphi} = \frac{\frac{1}{2} + 2\rho - \sqrt{\frac{1}{4} + 2\rho}}{\frac{1}{2} - 2\rho + \sqrt{\frac{1}{4} + 2\rho}}$$

Задача

В системе M / M / 1 $\lambda_1 = 0,8$ $\mu_1 = 1$

1) Найти интенсивность поступления заявок в систему M / E_2 / 1, которая обеспечит то же среднее число заявок в системе, если интенсивность обслуживания такая же, как в системе M / M / 1

Задача

M / M / 1: $\lambda_1 = 0,8 \qquad \mu_1 = 1$

M / E_2 / 1: $\lambda_2 = ? \qquad \mu_2 = \mu_1 \qquad \overline{j_2} = \overline{j_1}$

$$\rho_1 = 0,8 \qquad \overline{j_1} = \frac{\rho_1}{1-\rho_1} = 4$$

$$\overline{j_2} = \frac{\rho_2\left(4-\rho_2\right)}{4\left(1-\rho_2\right)} \Rightarrow \rho_2 = 10 \pm 2\sqrt{21}$$

$$0 < \rho_2 < 1 \Rightarrow \rho_2 = 10 - 2\sqrt{21}$$

$$\mu_2 = 1 \Rightarrow \lambda_2 = 10 - 2\sqrt{21}$$

Задача

В системе M / M / 1 $\lambda_1 = 0{,}8$ $\mu_1 = 1$

2) Найти интенсивность обслуживания заявок в системе M / E_2 / 1, которая обеспечит то же среднее число заявок в системе, если интенсивность поступления такая же,
как в системе M / M / 1

Задача

M / M / 1: $\lambda_1 = 0{,}8 \qquad \mu_1 = 1$

M / E$_2$ / 1: $\mu_2 = ? \quad \lambda_2 = \lambda_1 \quad \overline{j_2} = \overline{j_1}$

$$\rho_2 = 10 - 2\sqrt{21}$$

$$\lambda_2 = 0{,}8 \Rightarrow \mu_2 = \frac{0{,}8}{10 - 2\sqrt{21}}$$

Задача

В системе M / M / 1 $\lambda_1 = 0{,}8$ $\mu_1 = 1$

3) Найти интенсивность поступления заявок в систему E_2 / M / 1, которая обеспечит то же среднее число заявок в системе, если интенсивность обслуживания такая же, как в системе M / M / 1

Задача

M / M / 1: $\lambda_1 = 0,8 \qquad \mu_1 = 1$

E_2 / M / 1: $\lambda_3 = ? \qquad \mu_3 = \mu_1 \qquad \overline{j_3} = \overline{j_1}$

$\overline{j_1} = 4$

$$\overline{j_3} = \frac{\frac{1}{2} + 2\rho_3 - \sqrt{\frac{1}{4} + 2\rho_3}}{\frac{1}{2} - 2\rho_3 + \sqrt{\frac{1}{4} + 2\rho_3}} \Rightarrow \rho_3 = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}\sqrt{5}$$

$$\mu_3 = 1 \Rightarrow \lambda_3 = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}\sqrt{5}$$

Задача

В системе M / M / 1 $\lambda_1 = 0,8$ $\mu_1 = 1$

4) Найти интенсивность обслуживания заявок в системе E_2 / M / 1, которая обеспечит то же среднее число заявок в системе, если интенсивность поступления такая же,
как в системе M / M / 1

Задача

M / M / 1: $\lambda_1 = 0,8 \qquad \mu_1 = 1$

M / E_2 / 1: $\mu_3 = ? \qquad \lambda_3 = \lambda_1 \qquad \overline{j_3} = \overline{j_1}$

$$\rho_3 = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}\sqrt{5}$$

$$\lambda_3 = 0,8 \Rightarrow \mu_3 = \frac{0,8}{\frac{2}{5} + \frac{1}{5}\sqrt{5}} = \frac{4}{2 + \sqrt{5}}$$