Задача коммивояжера

- Часть 1. Формулировка задачи коммивояжера
- Часть 2. Методы решения
- Часть 3. Пример с 7 городами, жадные методы
- Часть 4. Пример с 5 городами, метод ветвей и границ
- Часть 5. Незамкнутая задача коммивояжера

- **Часть 1. Формулировка задачи коммивояжера**
- Часть 2. Методы решения
- Часть 3. Пример с 7 городами, жадные методы
- Часть 4. Пример с 5 городами, метод ветвей и границ
- Часть 5. Незамкнутая задача коммивояжера

- Задача коммивояжера:

  имеется n городов, задана матрица расстояний между городами $T = \{t_{ij}\}_{i,j=\overline{1,n}}$.

  Коммивояжер должен побывать в каждом городе только один раз и вернуться в начальный город.

  Требуется найти маршрут, имеющий минимальную длину

Формирование матрицы

$$T = \left\{ t_{ij} \right\}_{i,j=\overline{1,n}}$$

$$t_{ij} > 0, t_{ii} = \infty$$

- Евклидова метрика

$$t_{ij} = \sqrt{\left(x_i - x_j \right)^2 + \left(y_i - y_j \right)^2}$$

- симметричная

- выполняется неравенство треугольника

$$t_{ij} + t_{jk} \geq t_{ik}$$

Формирование матрицы

- Манхэттенская метрика

$$t_{ij} = \left| x_i - x_j \right| + \left| y_i - y_j \right|$$

- симметричная

- Аффинная метрика

$$t_{ij} = \sqrt{\left(x_i - x_j \right)^2 + \left(y_i - y_j \right)^2 + \frac{1}{2}\left(x_i - x_j \right)\left(y_i - y_j \right)}$$

- симметричная

Формирование матрицы

- Чебышевская метрика

$$t_{ij} = \max\left(\left|x_i - x_j\right|, \left|y_i - y_j\right|\right)$$

- симметричная

- Несимметричная псевдометрическая матрица

$$t_{ij} = \begin{cases} \sqrt{\left(x_i - x_j\right)^2 + \left(y_i - y_j\right)^2}, i > j \\ \left|x_i - x_j\right| + \left|y_i - y_j\right|, i \le j \end{cases}$$

- Часть 1. Формулировка задачи коммивояжера
- **Часть 2. Методы решения**
- Часть 3. Пример с 7 городами, жадные методы
- Часть 4. Пример с 5 городами, метод ветвей и границ
- Часть 5. Незамкнутая задача коммивояжера

Методы решения

1. Точные методы

- метод полного перебора
- метод ветвей и границ

2. Приближенные и эвристические методы

- жадные методы
- алгоритм Карга-Томпсона
- методы локальных улучшений
- алгоритм Метрополиса (имитации отжига)

Алгоритм имитации отжига

- Основывается на имитации физического процесса, который происходит при кристаллизации вещества из жидкого состояния в твёрдое, в том числе при отжиге металлов
- Предполагается, что атомы выстроились в кристаллическую решётку, но переходы отдельных атомов из одной ячейки в другую ещё допустимы

Алгоритм имитации отжига

- Процесс протекает при постепенно понижающейся температуре, переход атома из одной ячейки в другую происходит с некоторой вероятностью, которая уменьшается с понижением температуры
- Устойчивая кристаллическая решётка соответствует минимуму энергии атомов, поэтому атом либо переходит в состояние с меньшим уровнем энергии, либо остаётся на месте

Методы решения

1. Точные методы

- метод полного перебора
- метод ветвей и границ

2. Приближенные и эвристические методы

- жадные методы
- алгоритм Карга-Томпсона
- методы локальных улучшений
- алгоритм Метрополиса (имитации отжига)

3. Интеллектуальные методы (приближенные)

- использование нейронных сетей
- использование генетических алгоритмов
- метод муравьиных колоний

Метод муравьиных колоний

- В основе муравьиного алгоритма лежит поведение муравьиной колонии – маркировка более удачных путей большим количеством феромона
- Муравей проходит случайным образом от колонии
- Если он находит источник пищи, то возвращается в гнездо, оставляя за собой след из феромона
- Эти феромоны привлекают других муравьёв находящихся вблизи, которые вероятнее всего пойдут по этому маршруту

Метод муравьиных колоний

- Вернувшись в гнездо они укрепят феромонную тропу
- Если существует 2 маршрута, то по более короткому, за то же время, успеют пройти больше муравьёв, чем по длинному
- Короткий маршрут станет более привлекательным
- Длинные пути, в конечном итоге, исчезнут из-за испарения феромонов

- Часть 1. Формулировка задачи коммивояжера
- Часть 2. Методы решения
- **Часть 3. Пример с 7 городами, жадные методы**
- Часть 4. Пример с 5 городами, метод ветвей и границ
- Часть 5. Незамкнутая задача коммивояжера

Жадные методы

Алгоритм ближайшего соседа

- На первом шаге выбираем город (вершину), из которого выходит дорога (ребро) наименьшей длины
- На каждом шаге выбираем ближайший непосещенный город

$$\begin{bmatrix} \infty & 6 & 29 & 10 & 59 & 34 & 13 \\ 6 & \infty & 23 & 4 & 53 & 28 & 7 \\ 23 & 21 & \infty & 20 & 31 & 6 & 17 \\ 8 & 3 & 20 & \infty & 50 & 25 & 4 \\ 43 & 40 & 22 & 38 & \infty & 26 & 47 \\ 26 & 24 & 4 & 22 & 18 & \infty & 22 \\ 10 & 5 & 17 & 4 & 35 & 19 & \infty \end{bmatrix}$$

$$
\begin{bmatrix}
\infty & 6 & 29 & 10 & 59 & 34 & 13 \\
6 & \infty & 23 & 4 & 53 & 28 & 7 \\
23 & 21 & \infty & 20 & 31 & 6 & 17 \\
8 & 3 & 20 & \infty & 50 & 25 & 4 \\
43 & 40 & 22 & 38 & \infty & 26 & 47 \\
26 & 24 & 4 & 22 & 18 & \infty & 22 \\
10 & 5 & 17 & 4 & 35 & 19 & \infty
\end{bmatrix}
$$

4 – 2 : 3

$$\begin{bmatrix} \infty & 6 & 29 & 10 & 59 & 34 & 13 \\ 6 & \infty & 23 & 4 & 53 & 28 & 7 \\ 23 & 21 & \infty & 20 & 31 & 6 & 17 \\ 8 & 3 & 20 & \infty & 50 & 25 & 4 \\ 43 & 40 & 22 & 38 & \infty & 26 & 47 \\ 26 & 24 & 4 & 22 & 18 & \infty & 22 \\ 10 & 5 & 17 & 4 & 35 & 19 & \infty \end{bmatrix}$$

4 – 2 : 3

$$
\begin{bmatrix}
\infty & 6 & 29 & 10 & 59 & 34 & 13 \\
6 & \infty & 23 & 4 & 53 & 28 & 7 \\
23 & 21 & \infty & 20 & 31 & 6 & 17 \\
8 & 3 & 20 & \infty & 50 & 25 & 4 \\
43 & 40 & 22 & 38 & \infty & 26 & 47 \\
26 & 24 & 4 & 22 & 18 & \infty & 22 \\
10 & 5 & 17 & 4 & 35 & 19 & \infty
\end{bmatrix}
$$

4 – 2 : 3

2 – 1 : 6

$$\begin{bmatrix} \infty & 6 & 29 & 10 & 59 & 34 & 13 \\ 6 & \infty & 23 & 4 & 53 & 28 & 7 \\ 23 & 21 & \infty & 20 & 31 & 6 & 17 \\ 8 & 3 & 20 & \infty & 50 & 25 & 4 \\ 43 & 40 & 22 & 38 & \infty & 26 & 47 \\ 26 & 24 & 4 & 22 & 18 & \infty & 22 \\ 10 & 5 & 17 & 4 & 35 & 19 & \infty \end{bmatrix}$$

4 – 2 : 3

2 – 1 : 6

$$\begin{bmatrix} \infty & 6 & 29 & 10 & 59 & 34 & 13 \\ 6 & \infty & 23 & 4 & 53 & 28 & 7 \\ 23 & 21 & \infty & 20 & 31 & 6 & 17 \\ 8 & 3 & 20 & \infty & 50 & 25 & 4 \\ 43 & 40 & 22 & 38 & \infty & 26 & 47 \\ 26 & 24 & 4 & 22 & 18 & \infty & 22 \\ 10 & 5 & 17 & 4 & 35 & 19 & \infty \end{bmatrix}$$

4 – 2 : 3

2 – 1 : 6

1 – 7 : 13

$$\begin{bmatrix} \infty & 6 & 29 & 10 & 59 & 34 & 13 \\ 6 & \infty & 23 & 4 & 53 & 28 & 7 \\ 23 & 21 & \infty & 20 & 31 & 6 & 17 \\ 8 & 3 & 20 & \infty & 50 & 25 & 4 \\ 43 & 40 & 22 & 38 & \infty & 26 & 47 \\ 26 & 24 & 4 & 22 & 18 & \infty & 22 \\ 10 & 5 & 17 & 4 & 35 & 19 & \infty \end{bmatrix}$$

4 – 2 : 3

2 – 1 : 6

1 – 7 : 13

$$\begin{bmatrix} \infty & 6 & 29 & 10 & 59 & 34 & 13 \\ 6 & \infty & 23 & 4 & 53 & 28 & 7 \\ 23 & 21 & \infty & 20 & 31 & 6 & 17 \\ 8 & 3 & 20 & \infty & 50 & 25 & 4 \\ 43 & 40 & 22 & 38 & \infty & 26 & 47 \\ 26 & 24 & 4 & 22 & 18 & \infty & 22 \\ 10 & 5 & 17 & 4 & 35 & 19 & \infty \end{bmatrix}$$

4 – 2 : 3

2 – 1 : 6

1 – 7 : 13

7 – 3 : 17

$$\begin{bmatrix} \infty & 6 & 29 & 10 & 59 & 34 & 13 \\ 6 & \infty & 23 & 4 & 53 & 28 & 7 \\ 23 & 21 & \infty & 20 & 31 & 6 & 17 \\ 8 & 3 & 20 & \infty & 50 & 25 & 4 \\ 43 & 40 & 22 & 38 & \infty & 26 & 47 \\ 26 & 24 & 4 & 22 & 18 & \infty & 22 \\ 10 & 5 & 17 & 4 & 35 & 19 & \infty \end{bmatrix}$$

4 – 2 : 3

2 – 1 : 6

1 – 7 : 13

7 – 3 : 17

$$
\begin{bmatrix}
\infty & 6 & 29 & 10 & 59 & 34 & 13 \\
6 & \infty & 23 & 4 & 53 & 28 & 7 \\
23 & 21 & \infty & 20 & 31 & 6 & 17 \\
8 & 3 & 20 & \infty & 50 & 25 & 4 \\
43 & 40 & 22 & 38 & \infty & 26 & 47 \\
26 & 24 & 4 & 22 & 18 & \infty & 22 \\
10 & 5 & 17 & 4 & 35 & 19 & \infty
\end{bmatrix}
$$

4 – 2 : 3

2 – 1 : 6

1 – 7 : 13

7 – 3 : 17

3 – 6 : 6

$$\begin{bmatrix} \infty & 6 & 29 & 10 & 59 & 34 & 13 \\ 6 & \infty & 23 & 4 & 53 & 28 & 7 \\ 23 & 21 & \infty & 20 & 31 & 6 & 17 \\ 8 & 3 & 20 & \infty & 50 & 25 & 4 \\ 43 & 40 & 22 & 38 & \infty & 26 & 47 \\ 26 & 24 & 4 & 22 & 18 & \infty & 22 \\ 10 & 5 & 17 & 4 & 35 & 19 & \infty \end{bmatrix}$$

4 – 2 : 3

2 – 1 : 6

1 – 7 : 13

7 – 3 : 17

3 – 6 : 6

$$
\begin{bmatrix}
\infty & 6 & 29 & 10 & 59 & 34 & 13 \\
6 & \infty & 23 & 4 & 53 & 28 & 7 \\
23 & 21 & \infty & 20 & 31 & 6 & 17 \\
8 & 3 & 20 & \infty & 50 & 25 & 4 \\
43 & 40 & 22 & 38 & \infty & 26 & 47 \\
26 & 24 & 4 & 22 & 18 & \infty & 22 \\
10 & 5 & 17 & 4 & 35 & 19 & \infty
\end{bmatrix}
$$

4 – 2 : 3

2 – 1 : 6

1 – 7 : 13

7 – 3 : 17

3 – 6 : 6

6 – 5 : 18

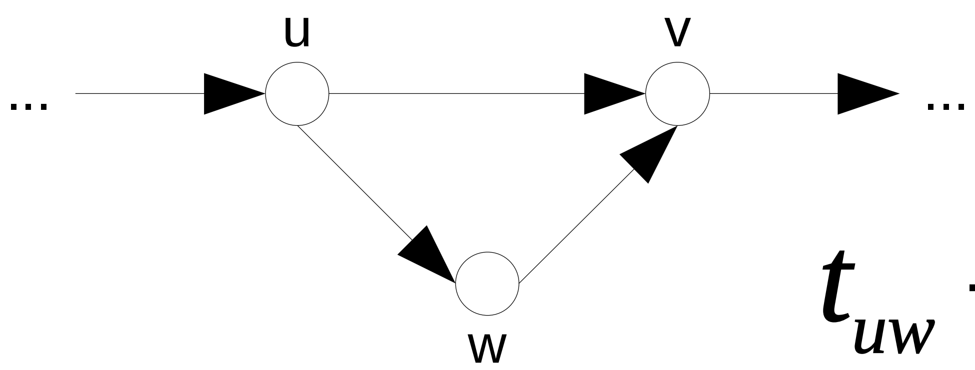
5 – 4 : 38

L = 101

Алгоритм Карга-Томпсона

(Эвристика ближайшей точки)

- На первом шаге выбираем две ближайшие в обе стороны вершины
- Для каждого ребра построенного пути выбираем вершину (из свободных), добавление которой приводит к наименьшему ухудшению:



$$t_{uw} + t_{wv} - t_{uv} \to \min$$

Методы локальных улучшений

- На первом шаге выбираем любое решение
- Для улучшения текущего решения применяем к нему какое-либо преобразование из заданной совокупности преобразований. Это улучшенное решение становится текущим решением
- Повторяем до тех пор, пока ни одно из преобразований в заданной совокупности не позволит улучшить текущее решение
- Если заданная совокупность преобразований включает все возможные преобразования, то получим точное решение, но трудоемкость такого алгоритма будет не лучше, чем у перебора всех решений

Алгоритм локальных улучшений

- Преобразование 1:

  два последовательно идущих города меняются местами

  (вычисление длины каждого маршрута требует не n, а 6 сложений)

- Преобразование 2:

  маршрут меняется на обратный

  (для несимметричных задач)

Алгоритм локальных улучшений

- На первом шаге задаем любой маршрут
- На каждом шаге рассматриваем все маршруты, которые могут быть получены из текущего маршрута следующим образом:

  - два последовательно идущих города меняются местами

  - маршрут меняется на обратный
- Из полученных маршрутов выбирается наименьший, если он лучше предыдущего

$$
\begin{bmatrix}
\infty & 6 & 29 & 10 & 59 & 34 & 13 \\
6 & \infty & 23 & 4 & 53 & 28 & 7 \\
23 & 21 & \infty & 20 & 31 & 6 & 17 \\
8 & 3 & 20 & \infty & 50 & 25 & 4 \\
43 & 40 & 22 & 38 & \infty & 26 & 47 \\
26 & 24 & 4 & 22 & 18 & \infty & 22 \\
10 & 5 & 17 & 4 & 35 & 19 & \infty
\end{bmatrix}
$$

1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 1 = 157

1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 1 = 157

1 – 3 – 2 – 4 – 5 – 6 – 7 – 1 = 162

1 – 2 – 4 – 3 – 5 – 6 – 7 – 1 = 119

1 – 2 – 3 – 5 – 4 – 6 – 7 – 1 = 155

1 – 2 – 3 – 4 – 6 – 5 – 7 – 1 = 149

1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 7 – 6 – 1 = 191

7 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 1 – 7 = 163

7 – 6 – 5 – 4 – 3 – 2 – 1 – 7 = 135

1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 1 = 157

1 – 3 – 2 – 4 – 5 – 6 – 7 – 1 = 162

1 – 2 – 4 – 3 – 5 – 6 – 7 – 1 = 119

1 – 2 – 3 – 5 – 4 – 6 – 7 – 1 = 155

1 – 2 – 3 – 4 – 6 – 5 – 7 – 1 = 149

1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 7 – 6 – 1 = 191

7 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 1 – 7 = 163

7 – 6 – 5 – 4 – 3 – 2 – 1 – 7 = 135

1 – 2 – 4 – 3 – 5 – 6 – 7 – 1 = 119

1 – 4 – 2 – 3 – 5 – 6 – 7 – 1 = 125

1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 1 = 157

1 – 2 – 4 – 5 – 3 – 6 – 7 – 1 = 120

1 – 2 – 4 – 3 – 6 – 5 – 7 – 1 = 111

1 – 2 – 4 – 3 – 5 – 7 – 6 – 1 = 153

7 – 2 – 4 – 3 – 5 – 6 – 1 – 7 = 125

7 – 6 – 5 – 3 – 4 – 2 – 1 – 7 = 101

1 – 2 – 4 – 3 – 5 – 6 – 7 – 1 = 119

1 – 4 – 2 – 3 – 5 – 6 – 7 – 1 = 125

1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 1 = 157

1 – 2 – 4 – 5 – 3 – 6 – 7 – 1 = 120

1 – 2 – 4 – 3 – 6 – 5 – 7 – 1 = 111

1 – 2 – 4 – 3 – 5 – 7 – 6 – 1 = 153

7 – 2 – 4 – 3 – 5 – 6 – 1 – 7 = 125

7 – 6 – 5 – 3 – 4 – 2 – 1 – 7 = 101

7 – 6 – 5 – 3 – 4 – 2 – 1 – 7 = 101

7 – 5 – 6 – 3 – 4 – 2 – 1 – 7 = 107

7 – 6 – 3 – 5 – 4 – 2 – 1 – 7 = 114

7 – 6 – 5 – 4 – 3 – 2 – 1 – 7 = 135

7 – 6 – 5 – 3 – 2 – 4 – 1 – 7 = 105

7 – 6 – 5 – 3 – 4 – 1 – 2 – 7 = 100

1 – 6 – 5 – 3 – 4 – 2 – 7 – 1 = 114

1 – 2 – 4 – 3 – 5 – 6 – 7 – 1 = 119

7 – 6 – 5 – 3 – 4 – 2 – 1 – 7 = 101

7 – 5 – 6 – 3 – 4 – 2 – 1 – 7 = 107

7 – 6 – 3 – 5 – 4 – 2 – 1 – 7 = 114

7 – 6 – 5 – 4 – 3 – 2 – 1 – 7 = 135

7 – 6 – 5 – 3 – 2 – 4 – 1 – 7 = 105

7 – 6 – 5 – 3 – 4 – 1 – 2 – 7 = 100

1 – 6 – 5 – 3 – 4 – 2 – 7 – 1 = 114

1 – 2 – 4 – 3 – 5 – 6 – 7 – 1 = 119

7 – 6 – 5 – 3 – 4 – 1 – 2 – 7 = 100

7 – 5 – 6 – 3 – 4 – 1 – 2 – 7 = 106

7 – 6 – 3 – 5 – 4 – 1 – 2 – 7 = 113

7 – 6 – 5 – 4 – 3 – 1 – 2 – 7 = 131

7 – 6 – 5 – 3 – 1 – 4 – 2 – 7 = 102

7 – 6 – 5 – 3 – 4 – 2 – 1 – 7 = 101

2 – 6 – 5 – 3 – 4 – 1 – 7 – 2 = 114

2 – 1 – 4 – 3 – 5 – 6 – 7 – 2 = 120

7 – 6 – 5 – 3 – 4 – 1 – 2 – 7 = 100

7 – 5 – 6 – 3 – 4 – 1 – 2 – 7 = 106

7 – 6 – 3 – 5 – 4 – 1 – 2 – 7 = 113

7 – 6 – 5 – 4 – 3 – 1 – 2 – 7 = 131

7 – 6 – 5 – 3 – 1 – 4 – 2 – 7 = 102

7 – 6 – 5 – 3 – 4 – 2 – 1 – 7 = 101

2 – 6 – 5 – 3 – 4 – 1 – 7 – 2 = 114

2 – 1 – 4 – 3 – 5 – 6 – 7 – 2 = 120

Алгоритм ближайшего соседа

4 – 2 – 1 – 7 – 3 – 6 – 5 – 4 = 101

+ Алгоритм локальных улучшений

4 – 1 – 2 – 7 – 3 – 6 – 5 – 4 = 100

АБС из города 1: 1–2–4–7–3–6–5–1 = 98

АБС из города 1 + АЛУ: 1–2–4–7–3–6–5–1 = 98

АБС из 2: 24713652 = 111, +АЛУ: 21473652 = 101

АБС из 3: 36542173 = 101, +АЛУ: 36541273 = 100

АБС из 4: 42173654 = 101, +АЛУ: 41273654 = 100

АБС из 5: 53642175 = 107, +АЛУ: 56341275 = 106

АБС из 6: 63742156 = 119, +АЛУ: 51247365 = 98

АБС из 7: 74213657 = 113, +АЛУ: 56312475 = 102

АБС из города 1: 1–2–4–7–3–6–5–1 = 98

АБС из города 1 + АЛУ: 1–2–4–7–3–6–5–1 = 98

АБС из 2: 24713652 = 111, +АЛУ: 21473652 = 101

АБС из 3: 36542173 = 101, +АЛУ: 36541273 = 100

АБС из 4: 42173654 = 101, +АЛУ: 41273654 = 100

АБС из 5: 53642175 = 107, +АЛУ: 56341275 = 106

АБС из 6: 63742156 = 119, +АЛУ: 51247365 = 98

АБС из 7: 74213657 = 113, +АЛУ: 56312475 = 102

Жадный алгоритм ближайшего соседа:

4 – 2 – 1 – 7 – 3 – 6 – 5 – 4 = 101

Алгоритм Карга-Томпсона:

4–7–6–5–3–1–2–4 = 96

Алгоритм локальных улучшений:

7 – 6 – 5 – 3 – 4 – 1 – 2 – 7 = 100

Жадный алгоритм + алгоритм локальных улучшений:

4 – 1 – 2 – 7 – 3 – 6 – 5 – 4 = 100

Наилучший из жадных алгоритмов ближайшего соседа из разных городов:

1 – 2 – 4 – 7 – 3 – 6 – 5 – 1 = 98

Минимальный путь:

5 – 3 – 1 – 2 – 4 – 7 – 6 – 5 = 96

- Часть 1. Формулировка задачи коммивояжера
- Часть 2. Методы решения
- Часть 3. Пример с 7 городами, жадные методы
- **Часть 4. Пример с 5 городами, метод ветвей и границ**
- Часть 5. Незамкнутая задача коммивояжера

Пример

$$\begin{bmatrix} \infty & 47 & 22 & 46 & 29 \\ 34 & \infty & 25 & 34 & 19 \\ 18 & 18 & \infty & 33 & 7 \\ 38 & 27 & 24 & \infty & 38 \\ 21 & 14 & 6 & 27 & \infty \end{bmatrix}$$

Пример

$$\begin{bmatrix} \infty & 47 & 22 & 46 & 29 \\ 34 & \infty & 25 & 34 & 19 \\ 18 & 18 & \infty & 33 & 7 \\ 38 & 27 & 24 & \infty & 38 \\ 21 & 14 & 6 & 27 & \infty \end{bmatrix}$$

Жадный алгоритм БС: 5 – 3 – 1 – 4 – 2 – 5 = 116

Жадный алгоритм + АЛУ: 2 – 4 – 1 – 3 – 5 – 2 = 115

Алгоритм Карга-Томпсона: 5 – 1 – 3 – 4 – 2 – 5 = 122

Алгоритм К-Т + АЛУ: 5 – 2 – 4 – 1 – 3 – 5 = 115

Метод полного перебора

$$\begin{bmatrix} \infty & 47 & 22 & 46 & 29 \\ 34 & \infty & 25 & 34 & 19 \\ 18 & 18 & \infty & 33 & 7 \\ 38 & 27 & 24 & \infty & 38 \\ 21 & 14 & 6 & 27 & \infty \end{bmatrix}$$

$$G^{(0)}$$

123451	142351
123541	142531
124351	143251
124531	143521
125341	145231
125431	145321
132451	152341
132541	152431
134251	153241
134521	153421
135241	154231
135421	154321

24 маршрута

Метод ветвей и границ. Шаг 1

$$\begin{bmatrix} \infty & 47 & 22 & 46 & 29 \\ 34 & \infty & 25 & 34 & 19 \\ 18 & 18 & \infty & 33 & 7 \\ 38 & 27 & 24 & \infty & 38 \\ 21 & 14 & 6 & 27 & \infty \end{bmatrix}$$

$$t'_{ij} = t_{ij} - \min_k t_{ik}$$

Метод ветвей и границ. Шаг 1

$$\left[\begin{matrix} \infty & 47 & 22 & 46 & 29 \\ 34 & \infty & 25 & 34 & 19 \\ 18 & 18 & \infty & 33 & 7 \\ 38 & 27 & 24 & \infty & 38 \\ 21 & 14 & 6 & 27 & \infty \end{matrix}\right]\left|\begin{matrix} 22 \\ 19 \\ 7 \\ 24 \\ 6 \end{matrix}\right.$$

$$t'_{ij} = t_{ij} - \min_k t_{ik}$$

Метод ветвей и границ. Шаг 1

$$\begin{bmatrix} \infty & 47 & 22 & 46 & 29 \\ 34 & \infty & 25 & 34 & 19 \\ 18 & 18 & \infty & 33 & 7 \\ 38 & 27 & 24 & \infty & 38 \\ 21 & 14 & 6 & 27 & \infty \end{bmatrix} \begin{vmatrix} 22 \\ 19 \\ 7 \\ 24 \\ 6 \end{vmatrix}$$

$$t'_{ij} = t_{ij} - \min_k t_{ik}$$

$$\begin{bmatrix} \infty & 25 & 0 & 24 & 7 \\ 15 & \infty & 6 & 15 & 0 \\ 11 & 11 & \infty & 26 & 0 \\ 14 & 3 & 0 & \infty & 14 \\ 15 & 8 & 0 & 21 & \infty \end{bmatrix}$$

Метод ветвей и границ. Шаг 1

$$\begin{bmatrix} \infty & 25 & 0 & 24 & 7 \\ 15 & \infty & 6 & 15 & 0 \\ 11 & 11 & \infty & 26 & 0 \\ 14 & 3 & 0 & \infty & 14 \\ 15 & 8 & 0 & 21 & \infty \end{bmatrix}$$

$$t''_{ij} = t'_{ij} - \min_k t'_{kj}$$

Метод ветвей и границ. Шаг 1

$$\begin{bmatrix} \infty & 25 & 0 & 24 & 7 \\ 15 & \infty & 6 & 15 & 0 \\ 11 & 11 & \infty & 26 & 0 \\ 14 & 3 & 0 & \infty & 14 \\ 15 & 8 & 0 & 21 & \infty \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} 11 & 3 & 0 & 15 & 0 \end{matrix}$$

$$t''_{ij} = t'_{ij} - \min_k t'_{kj}$$

Метод ветвей и границ. Шаг 1

$$\begin{bmatrix} \infty & 25 & 0 & 24 & 7 \\ 15 & \infty & 6 & 15 & 0 \\ 11 & 11 & \infty & 26 & 0 \\ 14 & 3 & 0 & \infty & 14 \\ 15 & 8 & 0 & 21 & \infty \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} 11 & 3 & 0 & 15 & 0 \end{matrix}$$

$$t''_{ij} = t'_{ij} - \min_k t'_{kj}$$

$$\begin{bmatrix} \infty & 22 & 0 & 9 & 7 \\ 4 & \infty & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & \infty & 11 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & \infty & 14 \\ 4 & 5 & 0 & 6 & \infty \end{bmatrix}$$

Метод ветвей и границ. Шаг 1

$$\begin{bmatrix} \infty & 47 & 22 & 46 & 29 \\ 34 & \infty & 25 & 34 & 19 \\ 18 & 18 & \infty & 33 & 7 \\ 38 & 27 & 24 & \infty & 38 \\ 21 & 14 & 6 & 27 & \infty \end{bmatrix} \begin{vmatrix} 22 \\ 19 \\ 7 \\ 24 \\ 6 \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \infty & 25 & 0 & 24 & 7 \\ 15 & \infty & 6 & 15 & 0 \\ 11 & 11 & \infty & 26 & 0 \\ 14 & 3 & 0 & \infty & 14 \\ 15 & 8 & 0 & 21 & \infty \end{bmatrix} \\ \hline \begin{matrix} 11 & 3 & 0 & 15 & 0 \end{matrix} \end{array}$$

$$h = \sum_{i=1}^{n} \min_k t_{ik} + \sum_{j=1}^{n} \min_k t'_{kj}$$

$$h = 78 + 29 = 107 \qquad V\left(G^{(0)}\right) = h = 107$$

Метод ветвей и границ. Шаг 1

$$\begin{bmatrix} \infty & 22 & 0 & 9 & 7 \\ 4 & \infty & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & \infty & 11 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & \infty & 14 \\ 4 & 5 & 0 & 6 & \infty \end{bmatrix}$$

$$t_{ij} = \min_{k \neq j} t''_{ik} + \min_{k \neq i} t''_{kj}, t''_{ij} = 0$$

$$u_{kl} = \max_{i,j} t_{ij}$$

$$(k,l) = (1,3) \qquad u_{13} = 7$$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} - & - & 7 & - & - \\ - & - & - & 6 & 0 \\ 3 & - & - & - & 0 \\ - & 5 & 0 & - & - \\ - & - & 4 & - & - \end{bmatrix} \end{array}$$

Метод ветвей и границ. Шаг 1

Ветвление:

$$G = G_{k,l} \cup G_{\overline{k,l}}$$

$$G^{(0)} = G_{1,3} \cup G_{\overline{1,3}}$$

Оценка второго подмножества ($G_{\overline{1,3}}$):

$$V\left(G_{\overline{k,l}}\right) = V\left(G\right) + u_{kl}$$

$$V\left(G_{\overline{1,3}}\right) = V\left(G^{(0)}\right) + u_{13} = 107 + 7 = 114$$

Метод ветвей и границ. Шаг 1

Оценка первого подмножества ($G_{1,3}$):

- вычеркнем k=1 строку и l=3 столбец
- удаляем циклы: заменяем на ∞ элементы, используя которые можно получить контуры длиной меньше n

$$1 \to 3 \Rightarrow 3 \not\to 1$$

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \infty & 22 & 0 & 9 & 7 \\ 4 & \infty & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & \infty & 11 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & \infty & 14 \\ 4 & 5 & 0 & 6 & \infty \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4 & \infty & 0 & 0 \\ \infty & 8 & 11 & 0 \\ 3 & 0 & \infty & 14 \\ 4 & 5 & 6 & \infty \end{bmatrix} \end{array}$$

Метод ветвей и границ. Шаг 1

Оценка первого подмножества ($G_{1,3}$):

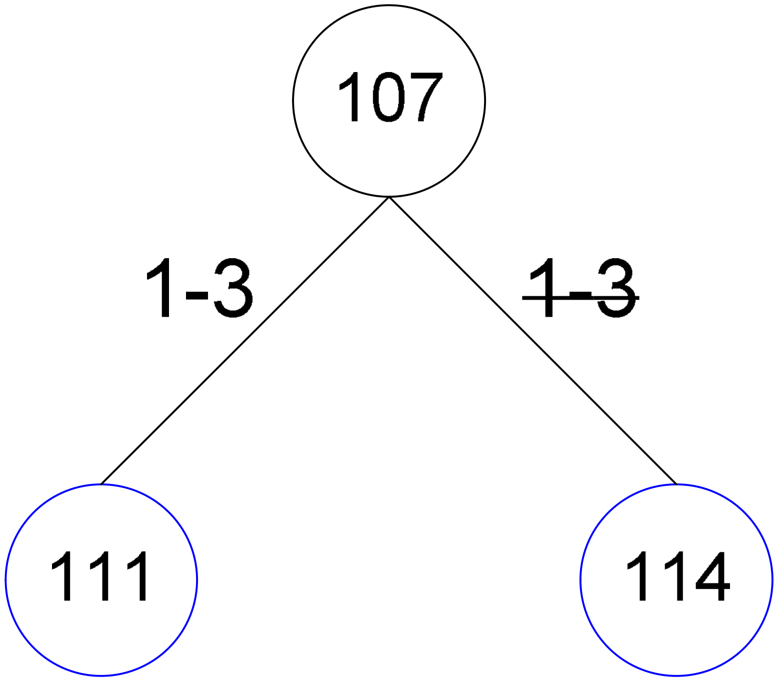
- приведем матрицу

$$\begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4 & \infty & 0 & 0 \\ \infty & 8 & 11 & 0 \\ 3 & 0 & \infty & 14 \\ 4 & 5 & 6 & \infty \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{|c} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4 & \infty & 0 & 0 \\ \infty & 8 & 11 & 0 \\ 3 & 0 & \infty & 14 \\ 0 & 1 & 2 & \infty \end{bmatrix} \\ \hline \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \end{array}$$

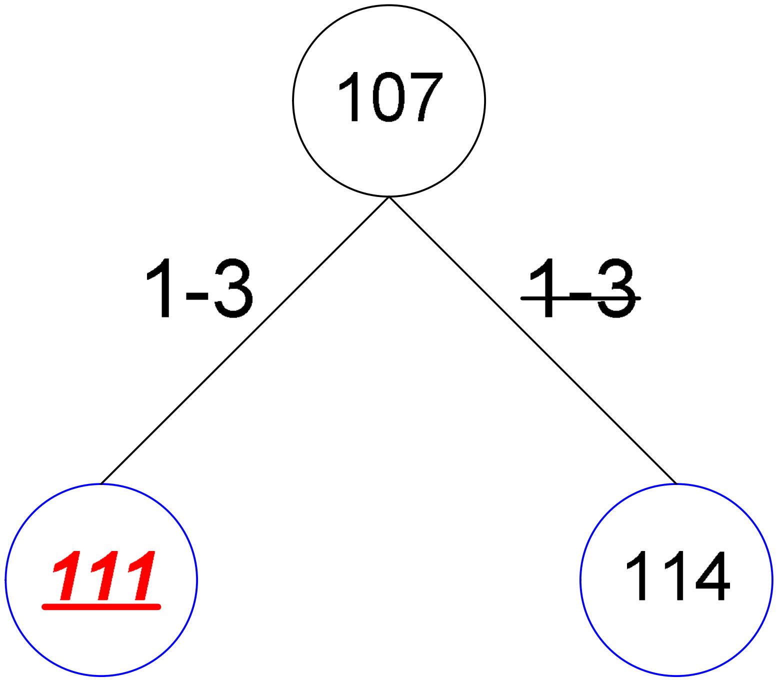
$$h = 4 + 0 = 4$$

$$V\left(G_{1,3}\right) = V\left(G^{(0)}\right) + h = 107 + 4 = 111$$

Метод ветвей и границ. Шаг 1



Метод ветвей и границ. Шаг 1



$$\min V(G)\Big|_{для\ "висячих"\ вершин}$$

Метод ветвей и границ. Шаг 2

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 4 & \infty & 0 & 0 \\ 3 & \infty & 8 & 11 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & \infty & 14 \\ 5 & 0 & 1 & 2 & \infty \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 4 & 5 \\ \hline 2 & - & - & 2 & 0 \\ 3 & - & - & - & 8 \\ 4 & - & 4 & - & - \\ 5 & 4 & - & - & - \end{array}$$

$$G_{1,3} = G_{1,3;3,5} \cup G_{1,3;\overline{3,5}}$$

$$V\left(G_{1,3;\overline{3,5}}\right) = V\left(G_{1,3}\right) + u_{35} = 111 + 8 = 119$$

Метод ветвей и границ. Шаг 2

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 4 & 5 \end{array} \\
\begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} &
\begin{bmatrix}
4 & \infty & 0 & 0 \\
\infty & 8 & 11 & 0 \\
3 & 0 & \infty & 14 \\
0 & 1 & 2 & \infty
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$1 \to 3,\ 3 \to 5 \Rightarrow$$

$$3 \not\to 1,\ 5 \not\to 3, 5 \not\to 1$$

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \end{array} \\
\begin{array}{c} 2 \\ 4 \\ 5 \end{array} &
\begin{bmatrix}
4 & \infty & 0 \\
3 & 0 & \infty \\
\infty & 1 & 2
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

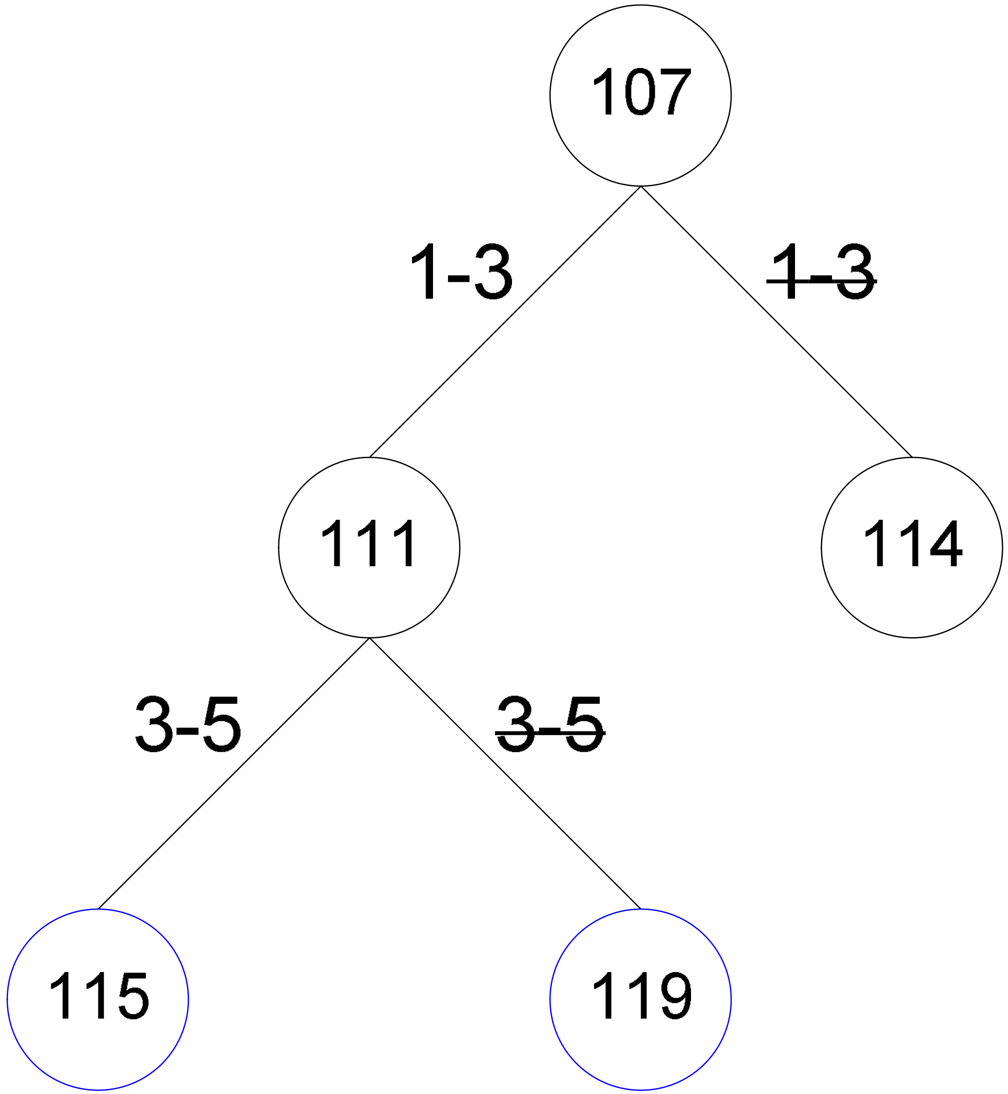
Метод ветвей и границ. Шаг 2

$$
\begin{array}{c|ccc|}
 & 1 & 2 & 4 \\
2 & 4 & \infty & 0 \\
4 & 3 & 0 & \infty \\
5 & \infty & 1 & 2
\end{array}
\;
\begin{array}{|c}
 \\
0 \\
0 \\
1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|ccc|}
 & 1 & 2 & 4 \\
2 & 4 & \infty & 0 \\
4 & 3 & 0 & \infty \\
5 & \infty & 0 & 1 \\
\hline
 & 3 & 0 & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|ccc|}
 & 1 & 2 & 4 \\
2 & 1 & \infty & 0 \\
4 & 0 & 0 & \infty \\
5 & \infty & 0 & 1
\end{array}
$$

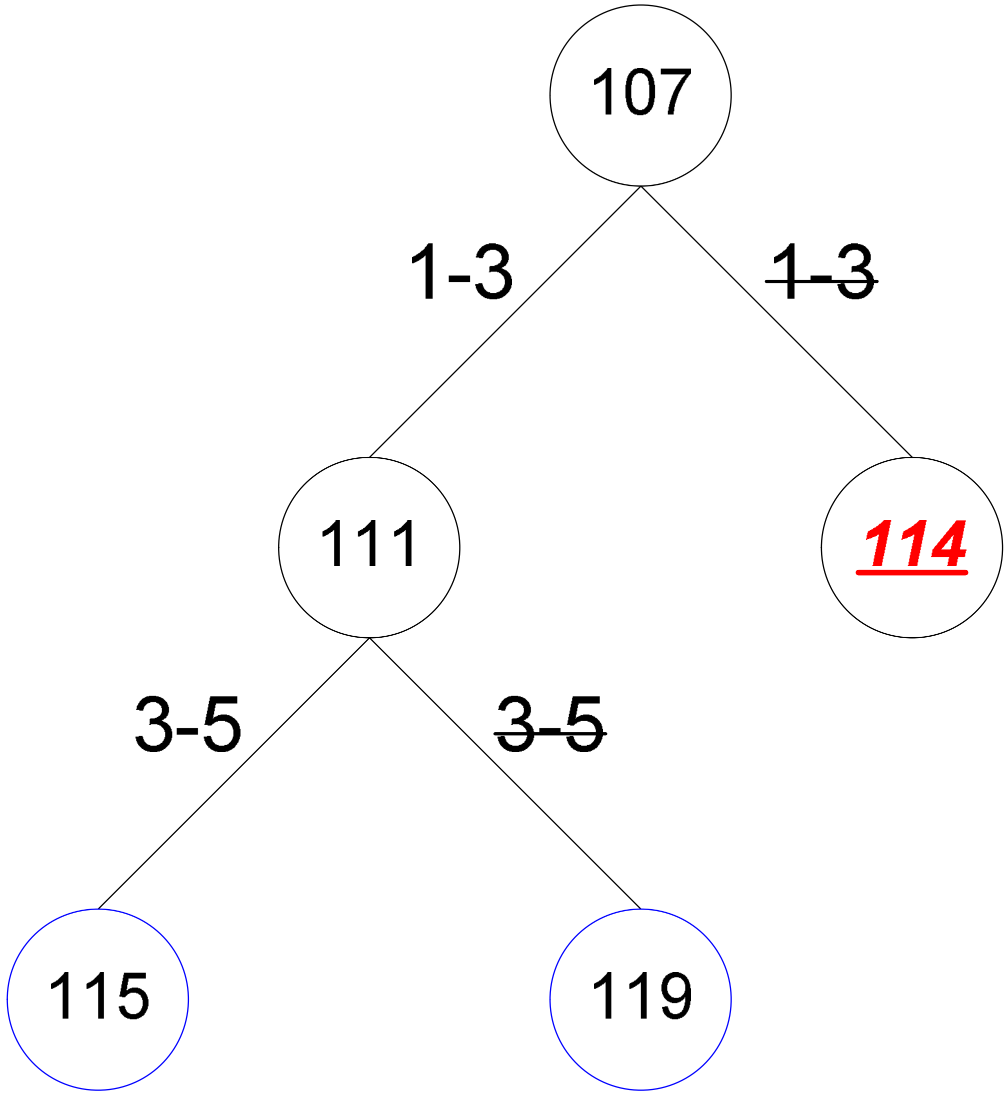
$$h = 1 + 3 = 4$$

$$V\left(G_{1,3;3,5}\right) = V\left(G_{1,3}\right) + h = 111 + 4 = 115$$

Метод ветвей и границ. Шаг 2



Метод ветвей и границ. Шаг 2



Метод ветвей и границ. Шаг 3

Ветвление множества $G_{\overline{1,3}}$:

- запрещаем переход 1-3:

заменяем на ∞ элемент (1,3)

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \infty & 22 & 0 & 9 & 7 \\ 4 & \infty & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & \infty & 11 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & \infty & 14 \\ 4 & 5 & 0 & 6 & \infty \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \infty & 22 & \infty & 9 & 7 \\ 4 & \infty & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & \infty & 11 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & \infty & 14 \\ 4 & 5 & 0 & 6 & \infty \end{bmatrix} \end{array}$$

Метод ветвей и границ. Шаг 3

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} &
\begin{bmatrix}
\infty & 22 & \infty & 9 & 7 \\
4 & \infty & 6 & 0 & 0 \\
0 & 8 & \infty & 11 & 0 \\
3 & 0 & 0 & \infty & 14 \\
4 & 5 & 0 & 6 & \infty
\end{bmatrix}
\end{array}
\left|\begin{array}{c} 7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right.
\qquad
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} &
\begin{bmatrix}
\infty & 15 & \infty & 2 & 0 \\
4 & \infty & 6 & 0 & 0 \\
0 & 8 & \infty & 11 & 0 \\
3 & 0 & 0 & \infty & 14 \\
4 & 5 & 0 & 6 & \infty
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Метод ветвей и границ. Шаг 3

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & \infty & 15 & \infty & 2 & 0 \\ 2 & 4 & \infty & 6 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 8 & \infty & 11 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & \infty & 14 \\ 5 & 4 & 5 & 0 & 6 & \infty \end{array}
\qquad
\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & - & - & - & - & 2 \\ 2 & - & - & - & 2 & 0 \\ 3 & 3 & - & - & - & 0 \\ 4 & - & 5 & 0 & - & - \\ 5 & - & - & 4 & - & - \end{array}$$

$$G_{\overline{1,3}} = G_{\overline{1,3};4,2} \cup G_{\overline{1,3};\overline{4,2}}$$

$$V\left(G_{\overline{1,3};\overline{4,2}}\right) = V\left(G_{\overline{1,3}}\right) + u_{42} = 114 + 5 = 119$$

Метод ветвей и границ. Шаг 3

$$
\begin{array}{c}
 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
\infty & 15 & \infty & 2 & 0 \\
4 & \infty & 6 & 0 & 0 \\
0 & 8 & \infty & 11 & 0 \\
3 & 0 & 0 & \infty & 14 \\
4 & 5 & 0 & 6 & \infty
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$\overline{1 \to 3},\ 4 \to 2 \Rightarrow 2 \not\to 4$$

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 3 & 4 & 5 \\
\hline
1 & \infty & \infty & 2 & 0 \\
2 & 4 & 6 & \infty & 0 \\
3 & 0 & \infty & 11 & 0 \\
5 & 4 & 0 & 6 & \infty
\end{array}
$$

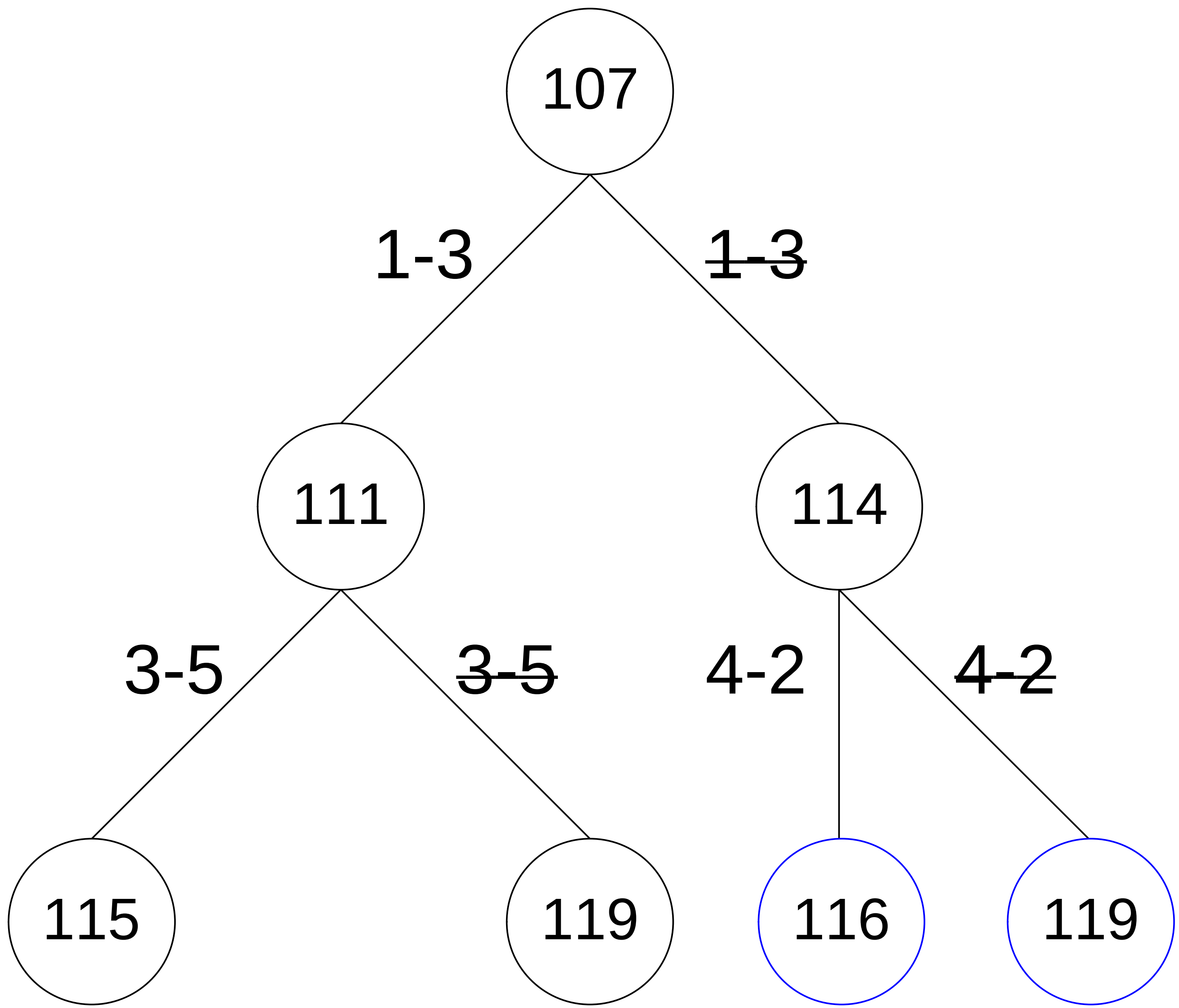
Метод ветвей и границ. Шаг 3

$$\begin{array}{c|c}
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} 1 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{array} & \begin{bmatrix} \infty & \infty & 2 & 0 \\ 4 & 6 & \infty & 0 \\ 0 & \infty & 11 & 0 \\ 4 & 0 & 6 & \infty \end{bmatrix} \\
 & \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}
\end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} 1 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{array} & \begin{bmatrix} \infty & \infty & 0 & 0 \\ 4 & 6 & \infty & 0 \\ 0 & \infty & 9 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & \infty \end{bmatrix}
\end{array}$$

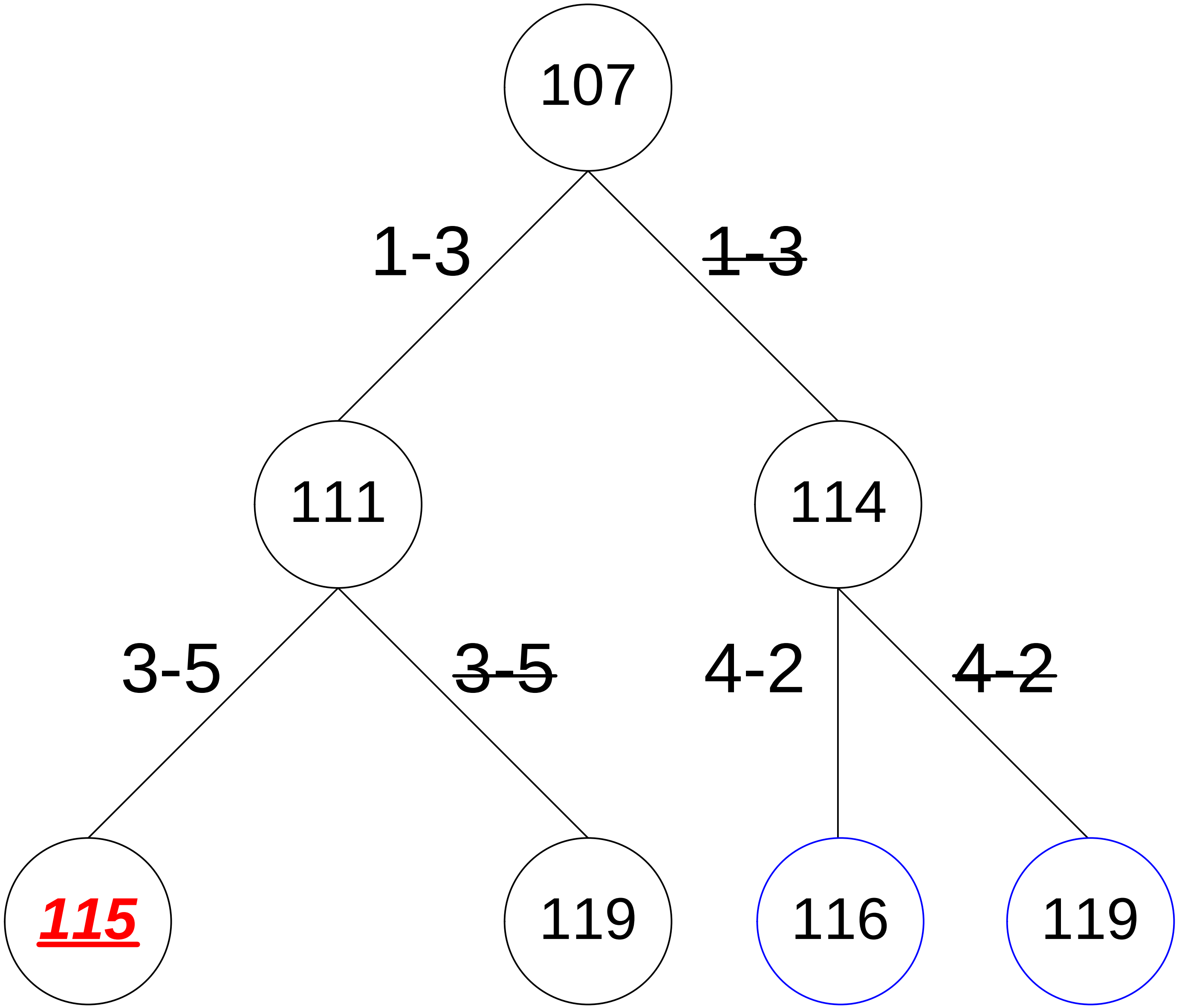
$$h = 0 + 2 = 2$$

$$V\left(G_{\overline{1,3};4,2}\right) = V\left(G_{\overline{1,3}}\right) + h = 114 + 2 = 116$$

Метод ветвей и границ. Шаг 3



Метод ветвей и границ. Шаг 3



Метод ветвей и границ. Шаг 4

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 4 \\ \hline 2 & 1 & \infty & 0 \\ 4 & 0 & 0 & \infty \\ 5 & \infty & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 4 \\ \hline 2 & - & - & 2 \\ 4 & 1 & 0 & - \\ 5 & - & 1 & - \end{array}$$

$$G_{1,3;3,5} = G_{1,3;3,5;2,4} \cup G_{1,3;3,5;\overline{2,4}}$$

$$V\left(G_{1,3;3,5;\overline{2,4}}\right) = V\left(G_{1,3;3,5}\right) + u_{24} = 115 + 2 = 117$$

Метод ветвей и границ. Шаг 4

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 4 \\ \hline 2 & & & \\ 4 & & \begin{bmatrix} 1 & \infty & 0 \\ 0 & 0 & \infty \\ \infty & 0 & 1 \end{bmatrix} & \\ 5 & & & \end{array}$$

$$1 \to 3,\ 3 \to 5,\ 2 \to 4 \Rightarrow$$

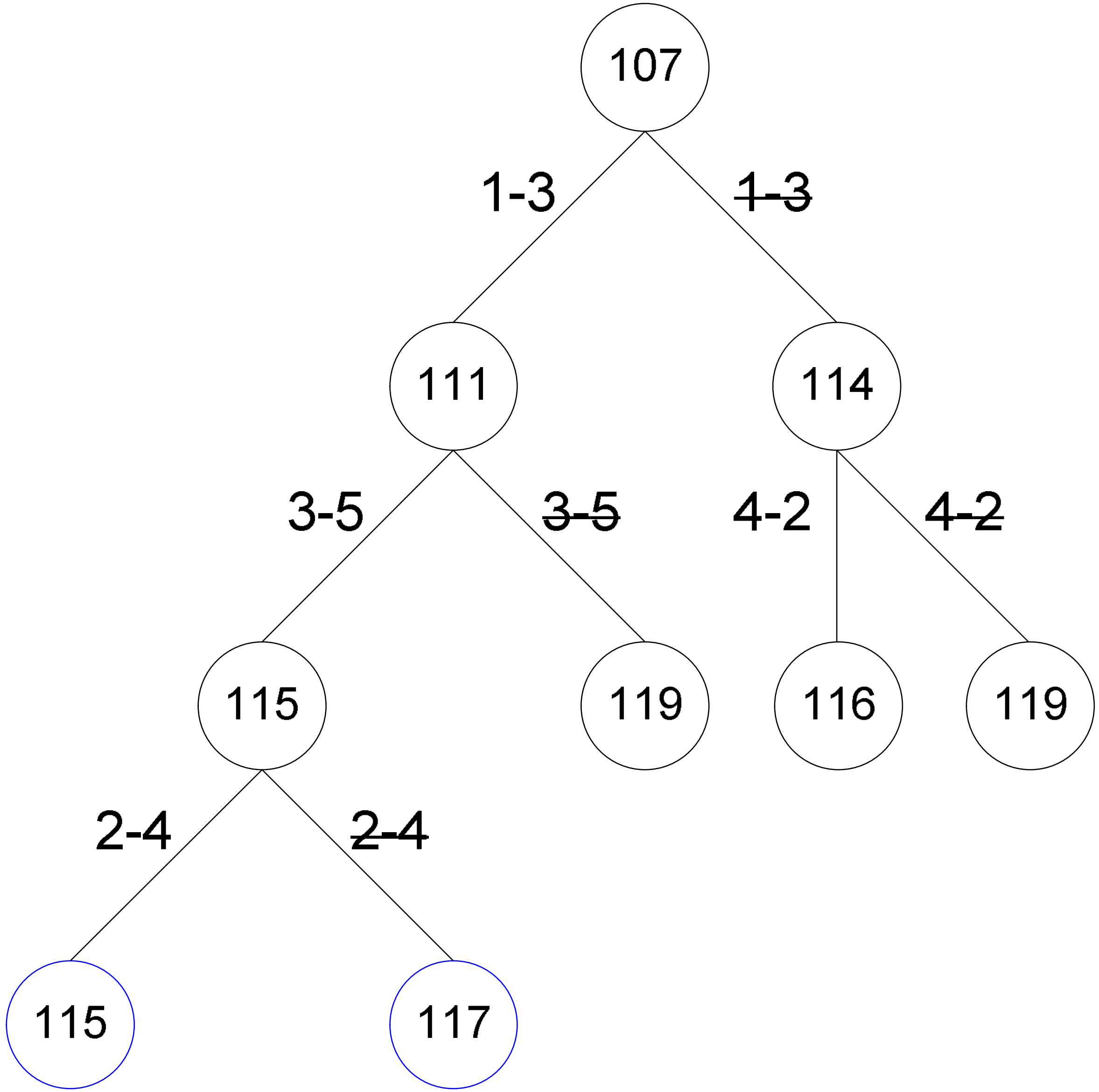
$$3 \not\to 1,\ 5 \not\to 3,\ 5 \not\to 1,\ 4 \not\to 2$$

$$\begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline 4 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$\begin{bmatrix} 0 & \infty \\ \infty & 0 \end{bmatrix}$}} \\ 5 & & \end{array}$$

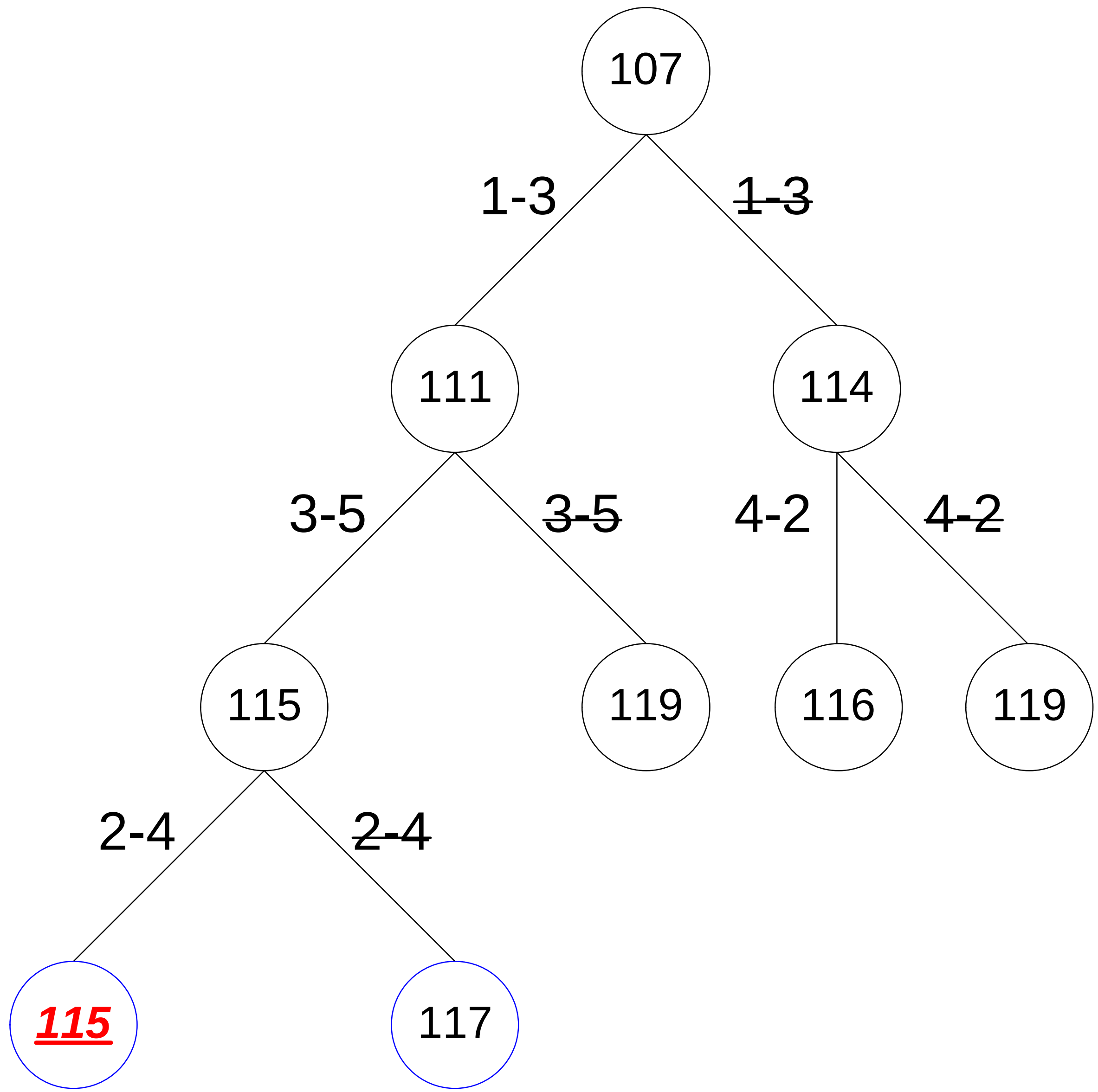
$$h = 0 + 0 = 0$$

$$V\left(G_{1,3;3,5;2,4}\right) = V\left(G_{1,3;3,5}\right) + h = 115 + 0 = 115$$

Метод ветвей и границ. Шаг 4



Метод ветвей и границ. Шаг 4



Метод ветвей и границ. Шаг 5

1 – 3
3 – 5
2 – 4

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 4 \\ 5 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & \infty \\ \infty & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

4 – 1
5 – 2

Метод ветвей и границ. Шаг 5

1 – 3
3 – 5
2 – 4

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\
\begin{array}{c} 4 \\ 5 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & \infty \\ \infty & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
\Rightarrow
$$

4 – 1
5 – 2

1 – 3 – 5 – 2 – 4 – 1

L = 115

- Часть 1. Формулировка задачи коммивояжера
- Часть 2. Методы решения
- Часть 3. Пример с 7 городами, жадные методы
- Часть 4. Пример с 5 городами, метод ветвей и границ
- **Часть 5. Незамкнутая задача коммивояжера**

- Незамкнутая задача коммивояжера:

  имеется n городов, задана матрица расстояний между городами $T = \left\{ t_{ij} \right\}_{i,\, j = \overline{1, n}}$.

  Найти маршрут посещения всех городов коммивояжером, имеющий минимальную длину, при условии, что в каждом городе он должен побывать только один раз, возвращаться в начальный город не нужно

Пример

$$\begin{bmatrix} \infty & 47 & 22 & 46 & 29 \\ 34 & \infty & 25 & 34 & 19 \\ 18 & 18 & \infty & 33 & 7 \\ 38 & 27 & 24 & \infty & 38 \\ 21 & 14 & 6 & 27 & \infty \end{bmatrix}$$

Маршрут из города 1

$$\begin{bmatrix} \infty & 47 & 22 & 46 & 29 \\ 34 & \infty & 25 & 34 & 19 \\ 18 & 18 & \infty & 33 & 7 \\ 38 & 27 & 24 & \infty & 38 \\ 21 & 14 & 6 & 27 & \infty \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \infty & 47 & 22 & 46 & 29 \\ 0 & \infty & 25 & 34 & 19 \\ 0 & 18 & \infty & 33 & 7 \\ 0 & 27 & 24 & \infty & 38 \\ 0 & 14 & 6 & 27 & \infty \end{bmatrix}$$

Маршрут из города 1: 1 – 3 – 5 – 2 – 4 = 77

Маршрут из города 2

$$\begin{bmatrix} \infty & 47 & 22 & 46 & 29 \\ 34 & \infty & 25 & 34 & 19 \\ 18 & 18 & \infty & 33 & 7 \\ 38 & 27 & 24 & \infty & 38 \\ 21 & 14 & 6 & 27 & \infty \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \infty & 0 & 22 & 46 & 29 \\ 34 & \infty & 25 & 34 & 19 \\ 18 & 0 & \infty & 33 & 7 \\ 38 & 0 & 24 & \infty & 38 \\ 21 & 0 & 6 & 27 & \infty \end{bmatrix}$$

Маршрут из города 2: 2 – 4 – 3 – 5 – 1 = 86

Маршрут из города 3

$$\begin{bmatrix} \infty & 47 & 22 & 46 & 29 \\ 34 & \infty & 25 & 34 & 19 \\ 18 & 18 & \infty & 33 & 7 \\ 38 & 27 & 24 & \infty & 38 \\ 21 & 14 & 6 & 27 & \infty \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \infty & 47 & 0 & 46 & 29 \\ 34 & \infty & 0 & 34 & 19 \\ 18 & 18 & \infty & 33 & 7 \\ 38 & 27 & 0 & \infty & 38 \\ 21 & 14 & 0 & 27 & \infty \end{bmatrix}$$

Маршрут из города 3: 3 – 5 – 2 – 4 – 1 = 93

Маршрут из города 4

$$\begin{bmatrix} \infty & 47 & 22 & 46 & 29 \\ 34 & \infty & 25 & 34 & 19 \\ 18 & 18 & \infty & 33 & 7 \\ 38 & 27 & 24 & \infty & 38 \\ 21 & 14 & 6 & 27 & \infty \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \infty & 47 & 22 & 0 & 29 \\ 34 & \infty & 25 & 0 & 19 \\ 18 & 18 & \infty & 0 & 7 \\ 38 & 27 & 24 & \infty & 38 \\ 21 & 14 & 6 & 0 & \infty \end{bmatrix}$$

Маршрут из города 4: 4 – 2 – 5 – 3 – 1 = 70

Маршрут из города 5

$$\begin{bmatrix} \infty & 47 & 22 & 46 & 29 \\ 34 & \infty & 25 & 34 & 19 \\ 18 & 18 & \infty & 33 & 7 \\ 38 & 27 & 24 & \infty & 38 \\ 21 & 14 & 6 & 27 & \infty \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \infty & 47 & 22 & 46 & 0 \\ 34 & \infty & 25 & 34 & 0 \\ 18 & 18 & \infty & 33 & 0 \\ 38 & 27 & 24 & \infty & 0 \\ 21 & 14 & 6 & 27 & \infty \end{bmatrix}$$

Маршрут из города 5: 5 – 2 – 4 – 3 – 1 = 90

Замкнутый маршрут: 1 – 3 – 5 – 2 – 4 – 1 = 115

Маршрут из города 1: 1 – 3 – 5 – 2 – 4 = 77

Маршрут из города 2: 2 – 4 – 3 – 5 – 1 = 86

Маршрут из города 3: 3 – 5 – 2 – 4 – 1 = 93

Маршрут из города 4: 4 – 2 – 5 – 3 – 1 = 70

Маршрут из города 5: 5 – 2 – 4 – 3 – 1 = 90