

Динамическое программирование. Задача поиска неисправностей

Динамическое программирование

- Метод динамического программирования:
 - сведение задачи с многими переменными к последовательности задач с меньшим числом переменных

Задача поиска неисправностей

- M элементов
- L диагностических тестов
- P_i – вероятность неисправности в i элементе
- C_j – затраты на j тест
- таблица соответствия тестов и элементов:
 - ‘1’ означает, что если элемент неисправен, то тест сигнализирует о неисправности
 - ‘0’ означает, что если элемент неисправен, то тест не сигнализирует о неисправности

Пример

$M = 5$

$L = 4$

	T1	T2	T3	T4	p
S1	0	0	1	1	0,2
S2	1	0	1	1	0,2
S3	1	0	0	0	0,2
S4	1	1	1	0	0,2
S5	1	1	1	1	0,2
C	46	65	31	82	

Задача поиска неисправностей

- R – множество элементов
- Тест j делит множество элементов на два подмножества:

$$R = R'(j) \cup R''(j)$$

$R'(j)$ – множество элементов,
диагностируемых тестом j

$R''(j)$ – множество элементов,
не диагностируемых тестом j

Задача поиска неисправностей

- Средние затраты на набор тестов для множества элементов R

$$f(R) = \min_j (C_j + F'_j(R) + F''_j(R))$$

$$F'_j(R) = \sum_{i \in R'(j)} \frac{p(R'(j))}{p(R)} f(R'(j))$$

$$F''_j(R) = \sum_{i \in R''(j)} \frac{p(R''(j))}{p(R)} f(R''(j))$$

$$p(R) = \sum_{i \in R} p_i$$

$$f(\{S_i\}) = 0$$

Задача поиска неисправностей

$$f\left(\left\{S_{i_1}, S_{i_2}, \mathbf{K}, S_{i_k}\right\}\right) \xrightarrow{\text{короткая запись}} f\left(i_1, i_2, \mathbf{K}, i_k\right)$$
$$\left\{S_{i_1}, S_{i_2}, \mathbf{K}, S_{i_k}\right\} \xrightarrow{\text{короткая запись}} \left(i_1, i_2, \mathbf{K}, i_k\right)$$

Начальные значения

$$f(\{S_i\}) = 0$$

	T1	T2	T3	T4	p
S1	0	0	1	1	0,2
S2	1	0	1	1	0,2
S3	1	0	0	0	0,2
S4	1	1	1	0	0,2
S5	1	1	1	1	0,2
C	46	65	31	82	

$$f(1) = 0$$

$$f(2) = 0$$

$$f(3) = 0$$

$$f(4) = 0$$

$$f(5) = 0$$

$$R=(1,2)$$

	T1	T2	T3	T4	p
S1	0	0	1	1	0,2
S2	1	0	1	1	0,2
S3	1	0	0	0	0,2
S4	1	1	1	0	0,2
S5	1	1	1	1	0,2
C	46	65	31	82	

тект	R'	R''	Cj
1	(2)	(1)	46
2	—	R	
3	R	—	
4	R	—	

$$R=(1,2)$$

	T1	T2	T3	T4	p
S1	0	0	1	1	0,2
S2	1	0	1	1	0,2
S3	1	0	0	0	0,2
S4	1	1	1	0	0,2
S5	1	1	1	1	0,2
C	46	65	31	82	

тест	R'	R''	Cj
1	(2)	(1)	46
2	–	R	
3	R	–	
4	R	–	

- $f(1,2) = 46$ – средние затраты на набор тестов для множества элементов $R=(1,2)$
- $j(1,2) = 1$ – условно-оптимальный тест для множества элементов $R=(1,2)$

$$R=(1,3)$$

	T1	T2	T3	T4	p
S1	0	0	1	1	0,2
S2	1	0	1	1	0,2
S3	1	0	0	0	0,2
S4	1	1	1	0	0,2
S5	1	1	1	1	0,2
C	46	65	31	82	

тект	R'	R''	Cj
1	(3)	(1)	46
2	–	R	
3	(1)	(3)	31
4	(1)	(3)	82

$$R=(1,3)$$

	T1	T2	T3	T4	p
S1	0	0	1	1	0,2
S2	1	0	1	1	0,2
S3	1	0	0	0	0,2
S4	1	1	1	0	0,2
S5	1	1	1	1	0,2
C	46	65	31	82	

тест	R'	R''	Cj
1	(3)	(1)	46
2	–	R	
3	(1)	(3)	31
4	(1)	(3)	82

- $f(1,3) = 31$ – средние затраты на набор тестов для множества элементов $R=(1,3)$
- $j(1,3) = 3$ – условно-оптимальный тест для множества элементов $R=(1,3)$

$$R=(2,3)$$

	T1	T2	T3	T4	p
S1	0	0	1	1	0,2
S2	1	0	1	1	0,2
S3	1	0	0	0	0,2
S4	1	1	1	0	0,2
S5	1	1	1	1	0,2
C	46	65	31	82	

тект	R'	R''	Cj
1	R	—	
2	—	R	
3	(2)	(3)	31
4	(2)	(3)	82

$$R=(2,3)$$

	T1	T2	T3	T4	p
S1	0	0	1	1	0,2
S2	1	0	1	1	0,2
S3	1	0	0	0	0,2
S4	1	1	1	0	0,2
S5	1	1	1	1	0,2
C	46	65	31	82	

тест	R'	R''	Cj
1	R	—	
2	—	R	
3	(2)	(3)	31
4	(2)	(3)	82

- $f(2,3) = 31$ – средние затраты на набор тестов для множества элементов $R=(2,3)$
- $j(2,3) = 3$ – условно-оптимальный тест для множества элементов $R=(2,3)$

$$R=(1,2,3)$$

	T1	T2	T3	T4	p
S1	0	0	1	1	0,2
S2	1	0	1	1	0,2
S3	1	0	0	0	0,2
S4	1	1	1	0	0,2
S5	1	1	1	1	0,2
C	46	65	31	82	

тект	R'	R''	p(R')	p(R'')	Cj
1	(2,3)	(1)	0,4	0,2	46
2	—	R			
3	(1,2)	(3)	0,4	0,2	31
4	(1,2)	(3)	0,4	0,2	82

$$p(R)=0,6$$

$$R=(1,2,3)$$

тест	R'	R''	p(R')	p(R'')	p(R')/p(R)	p(R'')/p(R)	f(R')	f(R'')	Cj
1	(2,3)	(1)	0,4	0,2	2/3	1/3	31	0	46
2	—	R							
3	(1,2)	(3)	0,4	0,2	2/3	1/3	46	0	31
4	(1,2)	(3)	0,4	0,2	2/3	1/3	46	0	82

$$p(R)=0,6$$

$$R=(1,2,3)$$

тест	$p(R')/p(R)$	$p(R'')/p(R)$	$f(R')$	$f(R'')$	C_j	$f(R)$
1	$2/3$	$1/3$	31	0	46	$46+31*2/3+0*1/3$ $=66,7$
2						
3	$2/3$	$1/3$	46	0	31	$31+46*2/3+0*1/3$ $=61,7$
4	$2/3$	$1/3$	46	0	82	$82+46*2/3+0*1/3$ $=112,7$

- $f(1,2,3) = 61,7$ – средние затраты на набор тестов для множества элементов $R=(1,2,3)$
- $j(1,2,3) = 3$ – условно-оптимальный тест для множества элементов $R=(1,2,3)$

Сводная таблица

R	f(R)	j(R)
1,2	46	1
1,3	31	3
2,3	31	3
1,2,3	61,7	3
...	...	...

$$R=(1,4)$$

	T1	T2	T3	T4	p
S1	0	0	1	1	0,2
S2	1	0	1	1	0,2
S3	1	0	0	0	0,2
S4	1	1	1	0	0,2
S5	1	1	1	1	0,2
C	46	65	31	82	

- $f(1,4) = 46$
- $j(1,4) = 1$

$$R=(2,4)$$

	T1	T2	T3	T4	p
S1	0	0	1	1	0,2
S2	1	0	1	1	0,2
S3	1	0	0	0	0,2
S4	1	1	1	0	0,2
S5	1	1	1	1	0,2
C	46	65	31	82	

- $f(2,4) = 65$
- $j(2,4) = 2$

$$R=(1,2,4)$$

	T1	T2	T3	T4	p
S1	0	0	1	1	0,2
S2	1	0	1	1	0,2
S3	1	0	0	0	0,2
S4	1	1	1	0	0,2
S5	1	1	1	1	0,2
C	46	65	31	82	

тект	R'	R''	p(R')	p(R'')	Cj
1	(2,4)	(1)	0,4	0,2	46
2	(4)	(1,2)	0,2	0,4	65
3	R	—			
4	(1,2)	(4)	0,4	0,2	82

$$p(R)=0,6$$

$$R=(1,2,4)$$

тест	R'	R''	$p(R')$	$p(R'')$	$p(R')/p(R)$	$p(R'')/p(R)$	$f(R')$	$f(R'')$	C_j
1	(2,4)	(1)	0,4	0,2	$2/3$	$1/3$	65	0	46
2	(4)	(1,2)	0,2	0,4	$1/3$	$2/3$	0	46	65
3	R	—							
4	(1,2)	(4)	0,4	0,2	$2/3$	$1/3$	46	0	82

$$p(R)=0,6$$

$$R=(1,2,4)$$

тест	$p(R')/p(R)$	$p(R'')/p(R)$	$f(R')$	$f(R'')$	C_j	$f(R)$
1	2/3	1/3	65	0	46	$46+65*2/3+0*1/3=89,3$
2	1/3	2/3	0	46	65	$65+0*2/3+46*2/3=95,7$
3						
4	2/3	1/3	46	0	82	$82+46*2/3+0*1/3=112,7$

- $f(1,2,4) = 89,3$ – средние затраты на набор тестов для множества элементов $R=(1,2,4)$
- $j(1,2,4) = 1$ – условно-оптимальный тест для множества элементов $R=(1,2,4)$

Сводная таблица

R	f(R)	j(R)
1,2	46	1
1,3	31	3
2,3	31	3
1,2,3	61,7	3
1,4	46	1
2,4	65	2
1,2,4	89,3	1
...	...	...

Сводная таблица

R	f(R)	j(R)
1,2	46	1
1,3	31	3
2,3	31	3
1,2,3	61,7	3
1,4	46	1
2,4	65	2
1,2,4	89,3	1

R	f(R)	j(R)
3,4	31	3
1,3,4	61,7	3
2,3,4	74,3	3
...	...	...

$$R=(1,2,3,4)$$

	T1	T2	T3	T4	p
S1	0	0	1	1	0,2
S2	1	0	1	1	0,2
S3	1	0	0	0	0,2
S4	1	1	1	0	0,2
S5	1	1	1	1	0,2
C	46	65	31	82	

тект	R'	R''	p(R')	p(R'')	Cj
1	(2,3,4)	(1)	0,6	0,2	46
2	(4)	(1,2,3)	0,2	0,6	65
3	(1,2,4)	(3)	0,6	0,2	31
4	(1,2)	(3,4)	0,4	0,4	82

$$p(R)=0,8$$

$$R=(1,2,3,4)$$

тест	R'	R''	$p(R')$	$p(R'')$	$p(R')/p(R)$	$p(R'')/p(R)$	$f(R')$	$f(R'')$	C_j
1	(2,3,4)	(1)	0,6	0,2	$3/4$	$1/4$	74,3	0	46
2	(4)	(1,2,3)	0,2	0,6	$3/4$	$1/4$	0	61,7	65
3	(1,2,4)	(3)	0,6	0,2	$3/4$	$1/4$	89,3	0	31
4	(1,2)	(3,4)	0,4	0,4	$1/2$	$1/2$	46	31	82

$$p(R)=0,8$$

$$R=(1,2,3,4)$$

тест	$p(R')/p(R)$	$p(R'')/p(R)$	$f(R')$	$f(R'')$	C_j	$f(R)$
1	$3/4$	$1/4$	74,3	0	46	$46+74,3*3/4+0*1/4=101,7$
2	$1/4$	$3/4$	0	61,7	65	$65+0*1/4+61,7*3/4=111,3$
3	$3/4$	$1/4$	89,3	0	31	$31+3/4*89,3+0*1/4=98$
4	$1/2$	$1/2$	46	31	82	$82+46*1/2+31*1/2=120,5$

- $f(1,2,3,4) = 98$ – средние затраты на набор тестов для множества элементов $R=(1,2,3,4)$
- $j(1,2,3,4) = 3$ – условно-оптимальный тест для множества элементов $R=(1,2,3,4)$

Сводная таблица

R	f(R)	j(R)
1,2	46	1
1,3	31	3
2,3	31	3
1,2,3	61,7	3
1,4	46	1
2,4	65	2
1,2,4	89,3	1

R	f(R)	j(R)
3,4	31	3
1,3,4	61,7	3
2,3,4	74,3	3
1,2,3,4	98	3
...	...	...

Сводная таблица

R	f(R)	j(R)	R	f(R)	j(R)	R	f(R)	j(R)
1,2	46	1	3,4	31	3	3,5	31	3
1,3	31	3	1,3,4	61,7	3	1,3,5	61,7	3
2,3	31	3	2,3,4	74,3	3	2,3,5	74,3	3
1,2,3	61,7	3	1,2,3,4	98	3	1,2,3,5	98	3
1,4	46	1	1,5	46	1	4,5	82	4
2,4	65	2	2,5	65	2	1,4,5	100,7	1
1,2,4	89,3	1	1,2,5	89,3	1	2,4,5	119,7	2

Сводная таблица

R	f(R)	j(R)
...	...	...
2,3,5	74,3	3
1,2,3,5	98	3
4,5	82	4
1,4,5	100,7	1
2,4,5	119,7	2

R	f(R)	j(R)
1,2,4,5	129	2
3,4,5	85,7	3
1,3,4,5	106,5	3
2,3,4,5	120,75	3
...	...	...

$$R=(1,2,3,4,5)$$

	T1	T2	T3	T4	p
S1	0	0	1	1	0,2
S2	1	0	1	1	0,2
S3	1	0	0	0	0,2
S4	1	1	1	0	0,2
S5	1	1	1	1	0,2
C	46	65	31	82	

тест	R'	R''	p(R')	p(R'')	Cj
1	(2,3,4,5)	(1)	0,8	0,2	46
2	(4,5)	(1,2,3)	0,4	0,6	65
3	(1,2,4,5)	(3)	0,8	0,2	31
4	(1,2,5)	(3,4)	0,6	0,4	82

$$p(R)=1$$

$$R=(1,2,3,4,5)$$

	R'	R''	p(R')	p(R'')	p(R')/p(R)	p(R'')/p(R)	f(R')	f(R'')
1	(2,3,4,5)	(1)	0,8	0,2	4/5	1/5	120,75	0
2	(4,5)	(1,2,3)	0,4	0,6	2/5	3/5	82	61,7
3	(1,2,4,5)	(3)	0,8	0,2	4/5	1/5	129	0
4	(1,2,5)	(3,4)	0,6	0,4	3/5	2/5	89,3	31

$$p(R)=1$$

$$R=(1,2,3,4,5)$$

тест	$p(R')/p(R)$	$p(R'')/p(R)$	$f(R')$	$f(R'')$	C_j	$f(R)$
1	4/5	1/5	120,75	0	46	$46+120,75 \cdot 4/5 = 142,6$
2	2/5	3/5	82	61,7	65	$65+82 \cdot 2/5+61,7 \cdot 3/5 = 134,8$
3	4/5	1/5	129	0	31	$31+129 \cdot 4/5 = 134,2$
4	3/5	2/5	89,3	31	82	$82+89,3 \cdot 3/5+31 \cdot 2/5 = 148$

- $f(1,2,3,4,5) = 134,2$ – средние затраты на набор тестов для множества элементов $R=(1,2,3,4,5)$
- $j(1,2,3,4,5) = 3$ – условно-оптимальный тест для множества элементов $R=(1,2,3,4,5)$

Сводная таблица

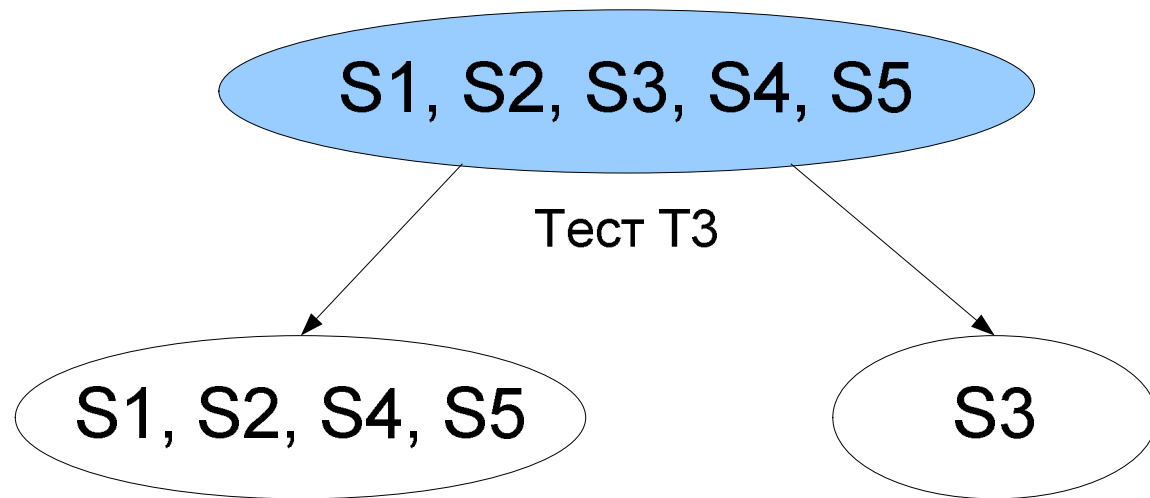
R	f(R)	j(R)
...	...	...
2,3,5	74,3	3
1,2,3,5	98	3
4,5	82	4
1,4,5	100,7	1
2,4,5	119,7	2

R	f(R)	j(R)
1,2,4,5	129	2
3,4,5	85,7	3
1,3,4,5	106,5	3
2,3,4,5	120,75	3
1,2,3,4,5	134,2	3

Диагностическая процедура

R	f	j
1,2	46	1
1,3	31	3
2,3	31	3
1,2,3	61,7	3
...	...	...
1,2,3,4	98	3
...	...	...
1,2,3,5	98	3
4,5	82	4
1,4,5	100,7	1
2,4,5	119,7	2
1,2,4,5	129	2
3,4,5	85,7	3
1,3,4,5	106,5	3
2,3,4,5	120,75	3
1,2,3,4,5	134,2	3

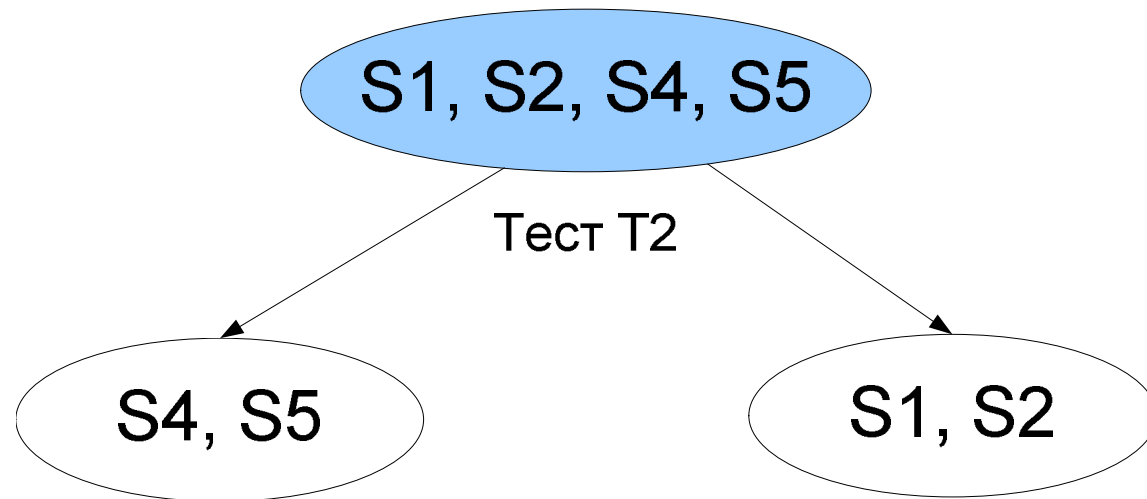
	T1	T2	T3	T4	p
S1	0	0	1	1	0,2
S2	1	0	1	1	0,2
S3	1	0	0	0	0,2
S4	1	1	1	0	0,2
S5	1	1	1	1	0,2
C	46	65	31	82	



Диагностическая процедура

R	f	j
1,2	46	1
1,3	31	3
2,3	31	3
1,2,3	61,7	3
...	...	...
1,2,3,4	98	3
...	...	...
1,2,3,5	98	3
4,5	82	4
1,4,5	100,7	1
2,4,5	119,7	2
1,2,4,5	129	2
3,4,5	85,7	3
1,3,4,5	106,5	3
2,3,4,5	120,75	3
1,2,3,4,5	134,2	3

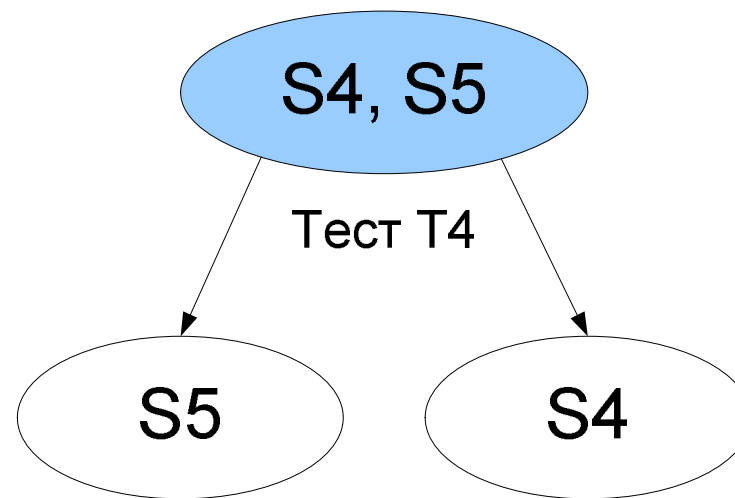
	T1	T2	T3	T4	p
S1	0	0	1	1	0,2
S2	1	0	1	1	0,2
S4	1	1	1	0	0,2
S5	1	1	1	1	0,2
C	46	65	31	82	
	T1	T2	T3	T4	p



Диагностическая процедура

R	f	j
1,2	46	1
1,3	31	3
2,3	31	3
1,2,3	61,7	3
...	...	...
1,2,3,4	98	3
...	...	...
1,2,3,5	98	3
4,5	82	4
1,4,5	100,7	1
2,4,5	119,7	2
1,2,4,5	129	2
3,4,5	85,7	3
1,3,4,5	106,5	3
2,3,4,5	120,75	3
1,2,3,4,5	134,2	3

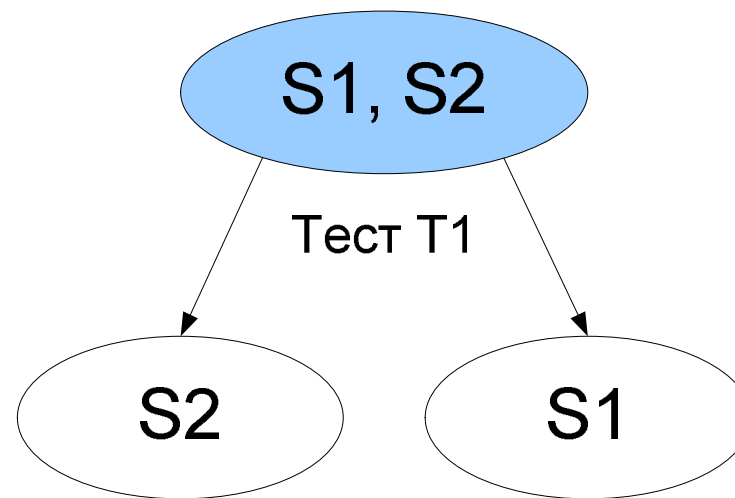
	T1	T2	T3	T4	p
S4	1	1	1	0	0,2
S5	1	1	1	1	0,2
C	46	65	31	82	



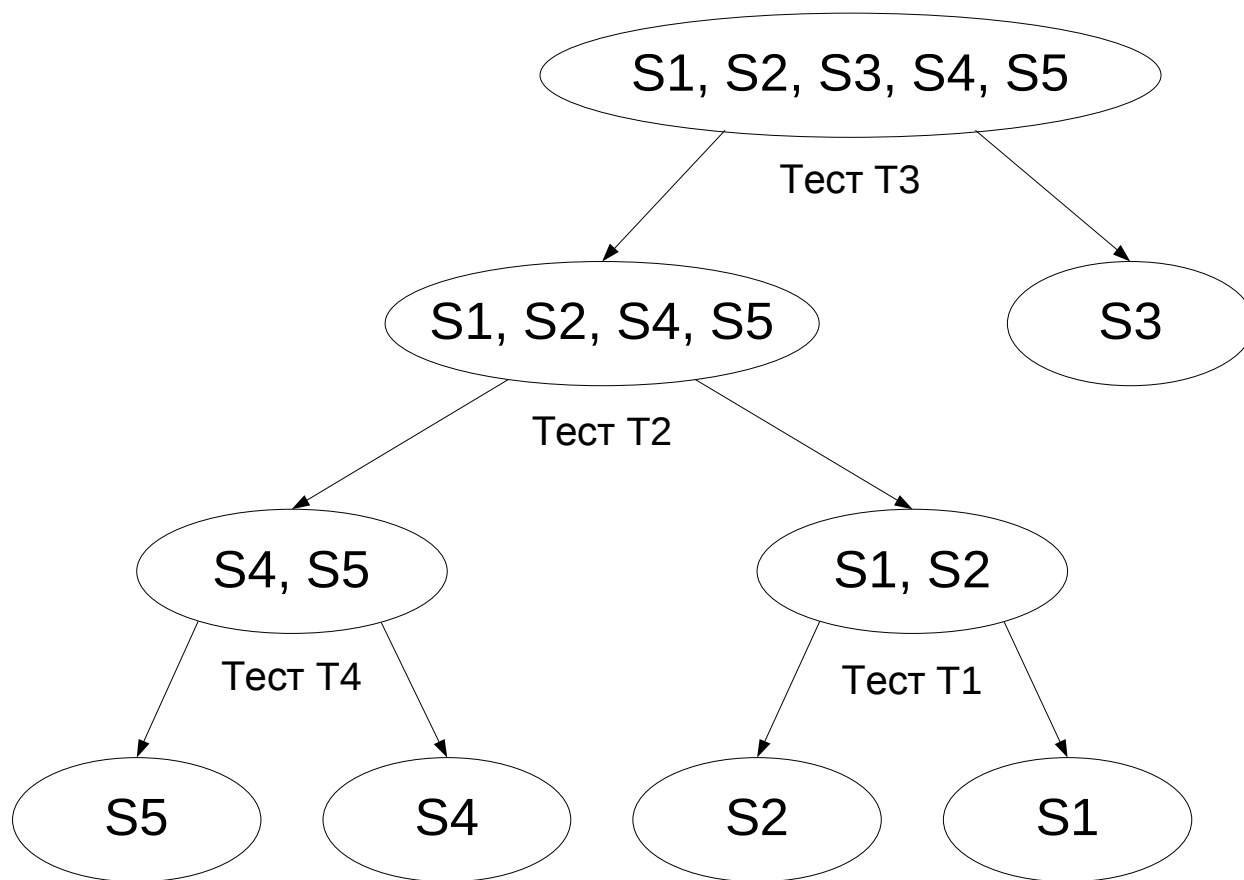
Диагностическая процедура

R	f	j
1,2	46	1
1,3	31	3
2,3	31	3
1,2,3	61,7	3
...	...	...
1,2,3,4	98	3
...	...	...
1,2,3,5	98	3
4,5	82	4
1,4,5	100,7	1
2,4,5	119,7	2
1,2,4,5	129	2
3,4,5	85,7	3
1,3,4,5	106,5	3
2,3,4,5	120,75	3
1,2,3,4,5	134,2	3

	T1	T2	T3	T4	p
S1	0	0	1	1	0,2
S2	1	0	1	1	0,2
C	46	65	31	82	

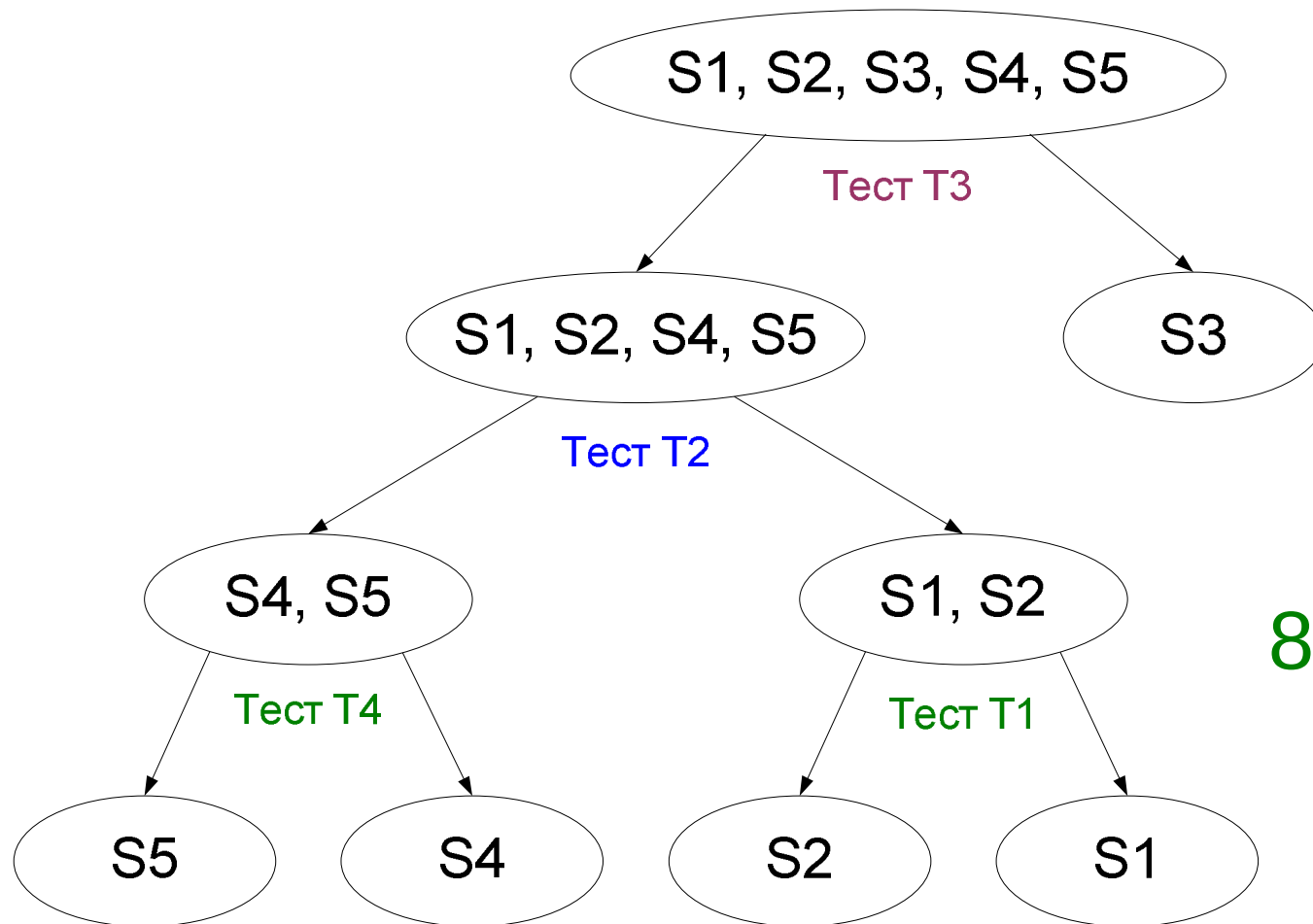


Диагностическая процедура



R	f	j
1,2	46	1
1,3	31	3
2,3	31	3
1,2,3	61,7	3
...	...	...
1,2,3,4	98	3
...	...	...
1,2,3,5	98	3
4,5	82	4
1,4,5	100,7	1
2,4,5	119,7	2
1,2,4,5	129	2
3,4,5	85,7	3
1,3,4,5	106,5	3
2,3,4,5	120,75	3
1,2,3,4,5	134,2	3

Диагностическая процедура



31

$$65 \cdot 4/5 = 52$$

$$82 \cdot 2/5 + 46 \cdot 2/5 = 51,2$$

$$31 + 52 + 51,2 = 134,2$$